

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Principi e Teoremi di Thévenin e di Norton

Anno Accademico 2023-2024

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:

Lezioni di Elettrotecnica Generale - Giulio Battistini

Colombo Cursi Pisa

https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Thévenin

Principio del generatore equivalente di tensione o principio di Thévenin

Il principio di Thévenin è un principio dell'elettrotecnica che afferma che qualunque circuito lineare, indipendentemente dalla sua complessità, visto da due terminali, è equivalente ad un generatore reale indipendente di tensione costituito da un generatore ideale di tensione (fem) in serie a un resistore: l'equivalenza vale limitatamente alla tensione e alla corrente in corrispondenza dei terminali del circuito. Enunciato per primo dallo scienziato tedesco Hermann von Helmholtz (1821-1894) nel 1853, ma riscoperto nel 1883 dall'ingegnere francese Léon Charles Thévenin (1857-1926) da cui prende il nome.

Enunciato

Dato un circuito lineare e cioè un circuito in cui l'uscita è in relazione lineare con l'ingresso e siano detti equivalenti due circuiti che hanno la stessa relazione tensione corrente ai terminali, allora per il principio di Thévenin, un circuito lineare con due terminali può essere sostituito con un circuito equivalente formato da un generatore reale indipendente di tensione di fem V_{Th} in serie con un resistore R_{Th} in cui V_{Th} è la tensione a vuoto ai terminali e R_{Th} è la resistenza di ingresso o resistenza equivalente vista agli stessi terminali quando i generatori indipendenti della rete sono disattivati.

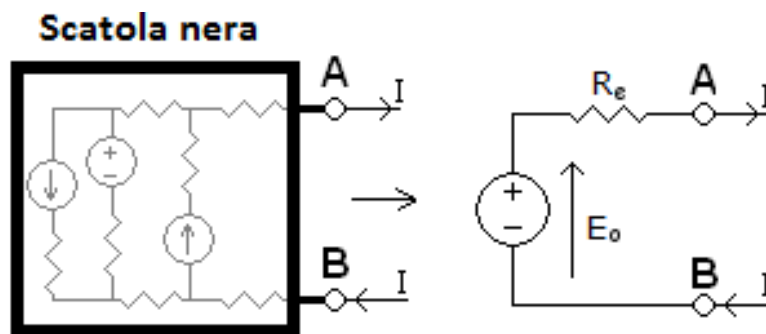


Fig. 0 – Generatore equivalente di tensione

Dimostrazione

Per dimostrare il teorema di Thévenin conviene fare riferimento alle tre figure seguenti che ci aiuteranno a capire i passi logici nei quali il teorema stesso si articola. La dimostrazione consiste nel verificare l'equivalenza della fig. 1 con la fig. 3 ai fini del calcolo di V e di I in cui E_0 è la tensione a vuoto presente ai morsetti A-B e R_e è la resistenza vista dagli stessi morsetti dopo aver passivato la rete. Passivare la rete vuol dire sostituire tutte le fem dei generatori indipendenti di tensione con un corto circuito ed aprire tutti i generatori indipendenti di corrente; se la rete presenta dei generatori dipendenti questi non devono essere passivati per il calcolo della resistenza equivalente in quanto sono controllati dalle variabili interne del circuito che saranno nulle perché abbiamo passivato tutti i generatori indipendenti.

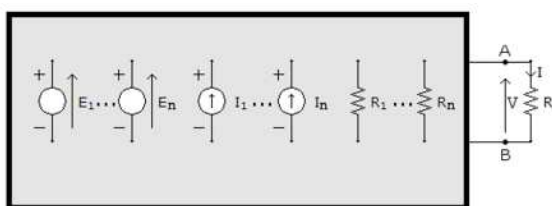


Fig. 1

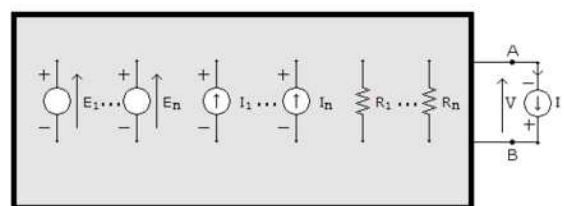


Fig. 2

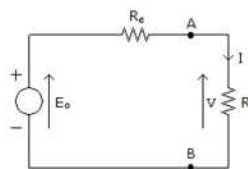


Fig. 3

I circuiti di fig. 1 e 2 risultano equivalenti avendo sostituito a R il generatore di corrente I che conserva inalterata la corrente in tale ramo; il circuito di fig. 3 risulta equivalente ai primi due ai fini del calcolo di V e I in virtù del teorema di Thévenin.

- 1) Si consideri il circuito di fig. 1 che a valle dei nodi A-B evidenzia la resistenza R di cui si vogliono determinare la tensione V presente ai suoi capi e la corrente I che l'attraversa. A monte di A-B c'è un contenitore, una scatola nera, che racchiude al suo interno il resto del circuito composto da generatori di tensione, di corrente e da altre resistenze.
- 2) Nulla cambia nei valori di V e di I se il resistore R viene sostituito da un generatore di corrente che continua a imporre a valle dei nodi A-B la stessa corrente I . In altri termini anziché studiare il circuito di fig. 1 è possibile studiare il circuito di fig. 2 ad esso equivalente.
- 3) Per calcolare la tensione V di fig. 2 è possibile ricorrere al principio di sovrapposizione degli effetti.
- 4) All'interno della scatola nera di fig. 2 si terrà dapprima attivo il solo generatore di tensione E_1 , sostituendo con cortocircuiti le fem degli altri generatori di tensione e con circuiti aperti i generatori di corrente ivi presenti e si sostituirà con un circuito aperto anche il generatore di corrente I a valle dei nodi A-B: in questo modo si determinerà la tensione V_{E1} ai capi di A-B dovuta alla sola E_1 . Si procederà allo stesso modo per gli altri generatori di tensione $E_2 \dots E_n$, ognuno dei quali contribuirà con $V_{E2} \dots V_{En}$ ai capi di A-B, avendo cura di continuare a sostituire con un circuito aperto il generatore di corrente I .
- 5) All'interno della scatola nera di fig. 2 si terrà poi attivo dapprima il solo generatore di corrente I_1 , sostituendo con circuiti aperti gli altri generatori di corrente e con cortocircuiti le fem dei generatori di tensione ivi presenti e si sostituirà con un circuito aperto anche il generatore di corrente I a valle dei nodi A-B: in questo modo si determinerà la tensione V_{I1} ai capi di A-B dovuta alla sola I_1 . Si procederà allo stesso modo per gli altri generatori di corrente $I_2 \dots I_n$, ognuno dei quali contribuirà con $V_{I2} \dots V_{In}$ ai capi di A-B, avendo cura di continuare a sostituire con un circuito aperto il generatore di corrente I .
- 6) Dal momento che nei punti 4) e 5) si è sempre sostituito con un circuito aperto il generatore di corrente, la somma $V_{E1} + \dots V_{En} + V_{I1} + \dots V_{In}$ rappresenta la tensione E_0 che si manifesta a vuoto ai capi di A-B.
- 7) Per completare l'applicazione del principio di sovrapposizione resta infine da considerare il generatore di corrente I . A tal fine all'interno della scatola nera di fig. 2 si sostituiranno con cortocircuiti tutte le fem dei generatori di tensione e con circuiti aperti tutti i generatori di corrente e questa volta si lascerà attivo il solo generatore di corrente I . La tensione ai capi di A-B che si determina a causa della presenza di quest'ultimo sarà data da $-R_e I$. Il termine R_e rappresenta la resistenza equivalente vista dal generatore di corrente che guarda dentro A-B. Il segno meno deriva dal fatto che, tenendo conto del verso delle frecce in fig. 2, il generatore di corrente produce una tensione positiva di verso opposto rispetto al verso positivo delle tensioni $V_{E2} \dots V_{En}, V_{I2} \dots V_{In}$ considerate nei punti 4) e 5).
- 8) Sommando tutte le tensioni parziali ricavate finora si ha che la tensione V ai capi di A-B è data da $V = E_0 - R_e I$. Tale formula non è altro che la rappresentazione del circuito di fig. 3 che risulta equivalente ai fini del calcolo di V e di I al circuito di fig.2 che a sua volta risulta equivalente al circuito di fig. 1.

In definitiva quindi per determinare E_0 bisogna aprire il ramo A-B di fig. 1 e calcolare la tensione che viene a manifestarsi fra tali nodi. Il calcolo può avvenire con uno qualunque dei metodi di risoluzione dei circuiti elettrici (correnti di maglia, potenziali ai nodi, Millman, ecc.) e quindi non necessariamente con il principio di sovrapposizione degli effetti utilizzato nella presente dimostrazione. Per determinare la R_e bisogna ancora una volta aprire il ramo A-B di fig.1, passivare i generatori di corrente e di tensione dentro la scatola nera e calcolare la resistenza che si vede guardando all'interno di tali nodi.

Teorema di Thévenin

Applicando il principio di Thévenin al sistema di figura 1,

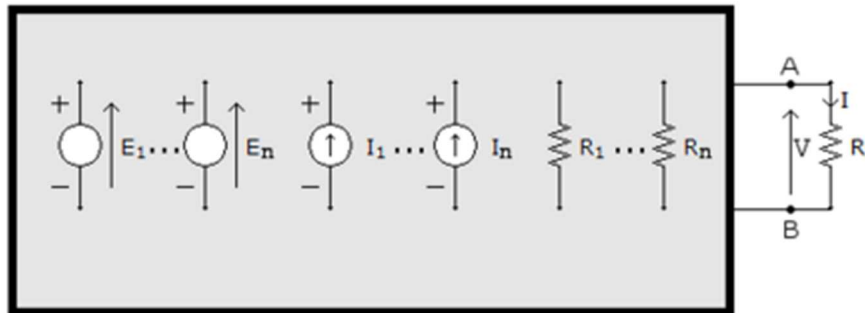


Fig. 1

otteniamo quindi il sistema di figura 3

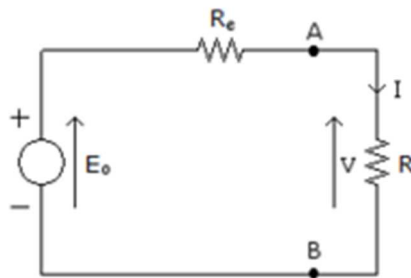


Fig. 3

Possiamo, infine, calcolare la corrente I che sarà data da:

$$I = \frac{E_0}{R_e + R}$$

Quindi il teorema ci dice che la corrente in un ramo (R) è data dal rapporto tra la tensione a vuoto ai morsetti del ramo (E_0), e la somma della resistenza vista ai morsetti del ramo tagliato una volta passivata la rete (R_e) e la resistenza (R) del ramo in esame.

Corrente alternata

Il teorema di Thévenin è valido anche nei circuiti lineari alimentati a corrente alternata, in questo caso il circuito lineare può essere sostituito con un circuito equivalente formato da un generatore di tensione alternata $\dot{V}_{Th}$ in serie con un'impedenza $\bar{Z}_{Th}$. Se le sorgenti del circuito operano a frequenze differenti allora è necessario determinare un circuito equivalente di Thévenin per ogni frequenza.

Principio del generatore equivalente di corrente o principio di Norton

Il principio di Norton è un principio dell'elettrotecnica che afferma che qualunque circuito lineare, indipendentemente dalla sua complessità, visto da due terminali, è equivalente ad un generatore reale indipendente di corrente costituito da un generatore ideale di corrente in parallelo a un resistore: l'equivalenza vale limitatamente alla tensione e alla corrente in corrispondenza dei terminali del circuito.

Enunciato

Dato un circuito lineare e cioè un circuito in cui l'uscita è in relazione lineare con l'ingresso e siano detti equivalenti due circuiti che hanno la stessa relazione tensione corrente ai terminali, allora per il principio di Norton un circuito lineare con due terminali può essere sostituito con un circuito equivalente formato da un generatore reale indipendente di corrente J_N in parallelo con un resistore R_N in cui J_N è la corrente di corto circuito ai terminali e R_N è la resistenza di ingresso o resistenza equivalente vista agli stessi terminali quando i generatori indipendenti della rete sono disattivati.

Dimostrazione

Supponiamo adesso che, nella figura 2, al posto del generatore di corrente ci sia un generatore di tensione come in fig.4,

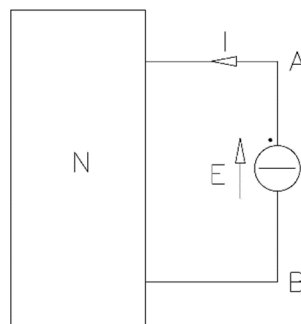


Fig. 4

anche in questo caso, essendo la rete lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e ricordando che per passivare un generatore di tensione occorre sostituire la sola fem con un c.c., è immediato capire che nei circuiti di fig.5 e 6 agiscono separatamente le cause, in particolare nella fig. 5 agiscono i generatori della rete e nella fig. 6 il generatore di tensione esterno.

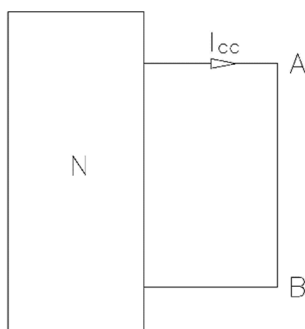


Fig. 5

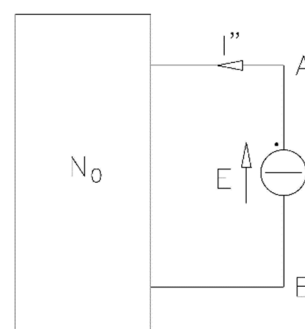


Fig. 6

Tenendo conto che

$$I'' = \frac{E}{R_{AB}}$$

dove R_{AB} è la resistenza vista dai morsetti AB una volta passivata la rete

Sovrapponendo gli effetti si ha:

$$I = -I_{cc} + I'' = -I_{cc} + \frac{E}{R_{AB}}$$

E questa equazione non è altro che l'equazione al nodo A della fig. 7

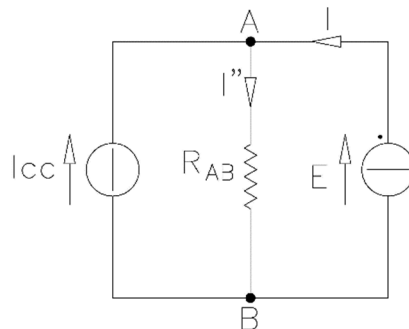


Fig. 7

Da ciò ne segue che la rete N di fig.4 è equivalente ad un generatore reale indipendente di corrente la cui corrente è quella di c.c. e la cui resistenza parallelo è quella vista ai morsetti della rete stessa una volta passivata.

In definitiva quindi per determinare I_{cc} bisogna cortocircuitare il ramo A-B di fig. 4 e calcolare la corrente che fluisce fra tali nodi. Il calcolo può avvenire con uno qualunque dei metodi di risoluzione dei circuiti elettrici (correnti di maglia, potenziali ai nodi, Millman, ecc.) e quindi non necessariamente con il principio di sovrapposizione degli effetti utilizzato nella presente dimostrazione. Per determinare la R_{AB} bisogna ancora una volta aprire il ramo A-B di fig.4, passivare i generatori di corrente e di tensione dentro la scatola nera e calcolare la resistenza che si vede guardando all'interno di tali nodi.

Teorema di Norton

Applichiamo ora il principio di Norton al sistema di figura 8,

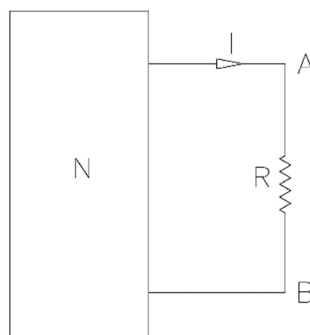


Fig. 8

Sostituiamo alla rete N il generatore equivalente di corrente o generatore di Norton ed otteniamo il sistema di fig. 9

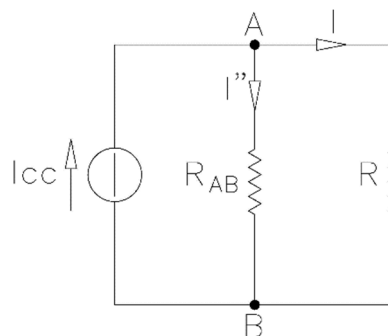


Fig. 9

ed applicando la regola del partitore di corrente ad un parallelo costituito da due sole resistenze, si ottiene

$$I = I_{cc} \frac{R_{AB}}{R_{AB} + R}$$

Quindi il teorema di Norton ci dice che la corrente in un ramo (R) è data dalla corrente di corto circuito che scorre nel ramo una volta corto circuitato (I_{cc}) per la resistenza vista ai morsetti del ramo (R_{AB}) una volta resa passiva la rete, diviso la somma della resistenza vista ai morsetti del ramo (R_{AB}) con la resistenza (R) del ramo in esame.

Trasformazione dei generatori reali indipendenti di tensione e di corrente

Vogliamo vedere adesso com'è possibile con i principi visti trasformare un generatore reale indipendente di tensione in un generatore reale indipendente di corrente e viceversa.

Dal generatore di tensione a quello di corrente

Consideriamo il circuito di fig.10,

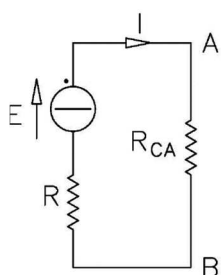


Fig. 10

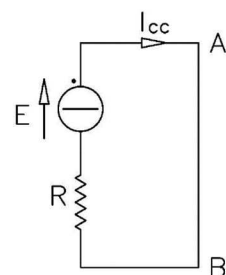


Fig. 11

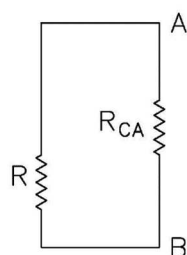


Fig. 12

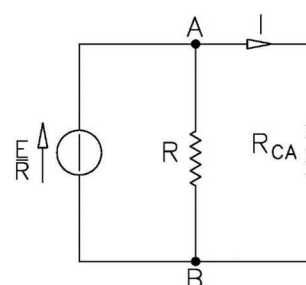


Fig. 13

per il principio del generatore equivalente di corrente di Norton, il generatore di tensione e la relativa resistenza in serie possono essere sostituiti da un generatore di corrente con in parallelo una resistenza (fig. 13), tale generatore deve erogare una corrente pari alla corrente che fluirebbe se la R_{CA} venisse sostituita con un c.c. (fig.11), e la resistenza deve essere pari alla resistenza vista ai morsetti AB una volta passivata la rete (fig. 12). Come è immediato notare dalla fig.11, la corrente di c.c. è data dal rapporto tra la fem. del generatore e la resistenza R , e la resistenza vista ai morsetti AB una volta passivata la rete non è altro che la R in serie con la fem del generatore di tensione.

In conclusione si ottiene il circuito di fig.13 nel quale abbiamo sostituito al generatore indipendente reale di tensione l'equivalente generatore indipendente reale di corrente.

Dal generatore di corrente a quello di tensione

Consideriamo il circuito di fig.14,

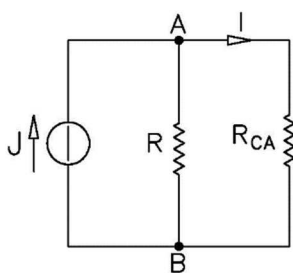


Fig. 14

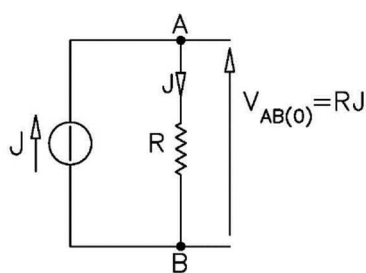


Fig. 15

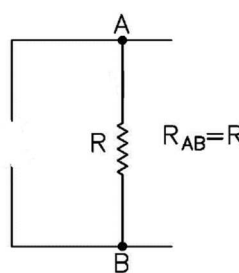


Fig. 16

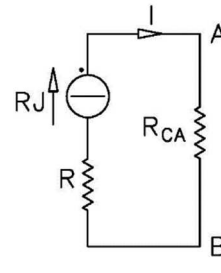


Fig. 17

per il principio del generatore equivalente di tensione di Thévenin, il generatore di corrente e la relativa resistenza in parallelo possono essere sostituiti da un generatore di tensione con in serie una resistenza (fig. 17), tale generatore deve avere una fem pari alla tensione che si stabilirebbe ai morsetti AB se la R_{CA} venisse sostituita con un ramo aperto (fig.15), e la resistenza deve essere pari alla resistenza vista ai morsetti AB una volta passivata la rete (fig. 16). Come è immediato notare dalla fig.15, la tensione a vuoto è data dal prodotto tra la corrente del generatore e la resistenza R , e la resistenza vista ai morsetti AB una volta passivata la rete non è altro che la R in parallelo con la corrente del generatore di corrente. In conclusione si ottiene il circuito di fig.17 nel quale abbiamo sostituito al generatore indipendente reale di tensione l'equivalente generatore indipendente reale di corrente.

Sommario

Principio del generatore equivalente di tensione o principio di Thévenin	2
Enunciato	2
Dimostrazione	2
Teorema di Thévenin	4
Corrente alternata	4
Principio del generatore equivalente di corrente o principio di Norton	5
Enunciato	5
Dimostrazione	5
Teorema di Norton	6
Trasformazione dei generatori reali indipendenti di tensione e di corrente	7
Dal generatore di tensione a quello di corrente	7
Dal generatore di corrente a quello di tensione	7
Sommario	8