Compito di Elettrotecnica

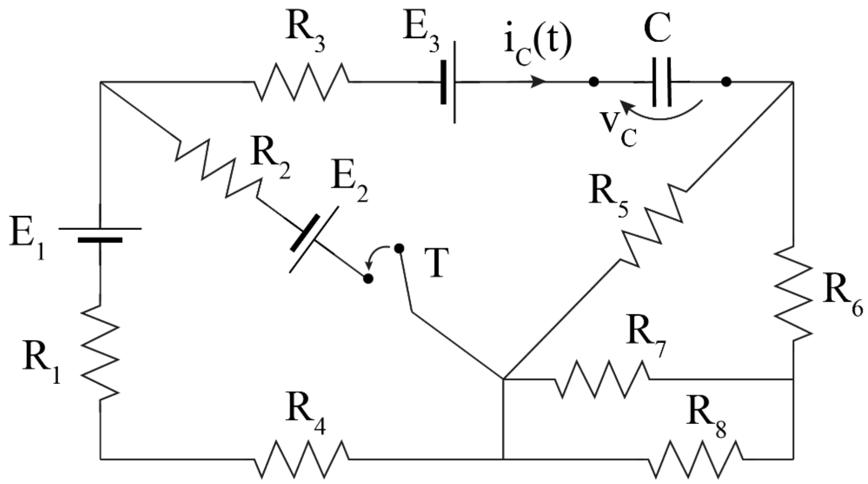
09 settembre 2025

Nome e Cognome ………………………………………………………… Matricola……………………

Corso di Laurea…………………………………………………

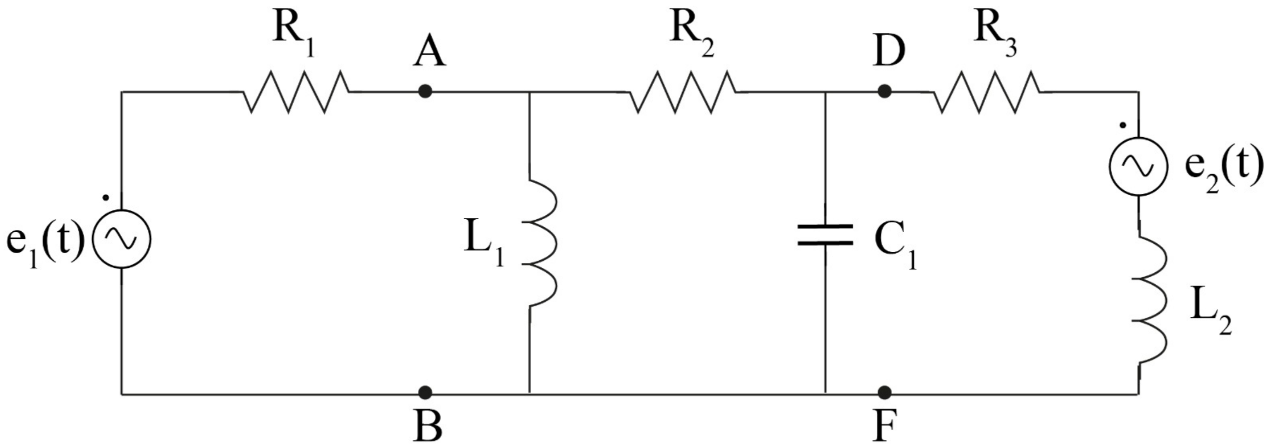
ES.1 – Il sistema mostrato in figura è in condizioni di regime stazionario. All'istante t=0s, viene chiuso l'interruttore T. Si richiede di determinare l'espressione temporale della tensione $\boldsymbol{v_C(t)}$ e della corrente $\boldsymbol{i_C(t)}$ nel condensatore.

$$E_1 = 15\,V;\; E_2 = 2\,V;\; E_3 = 7\,V;\; R_1 = 10\Omega;\; R_2 = R_7 = 5.5\Omega;\; R_3 = R_6 = 3.3\Omega;\; R_4 = R_8 = 20\Omega;\; R_5 = 2\Omega;\; C = 2.5mF.$$

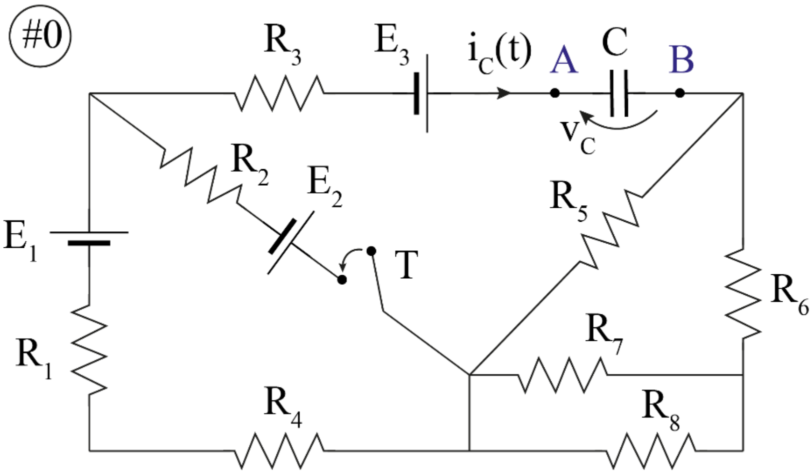


ES.2 – Il sistema in figura si trova in condizioni di regime alternato. Determinare la potenza generata ed erogata da E_1-R_1 e E_2-R_3-L_2.

$$e_1(t) = 3\sin\left(wt + \frac{\pi}{6}\right)\,V;\; e_2(t) = 5\sin\left(wt + \frac{\pi}{3}\right)\,V; R_1 = 2\,\Omega;\; R_2 = 4\,\Omega;\; R_3 = 5\,\Omega;\; C_1 = 20mF;\; L_1 = 2.5mH;\; L_2 = 15mH;\; \omega = 314\,rad/sec;$$



Esercizio 1



L'andamento temporale della tensione ai capi del condensatore è:

$$v_C(t) = v_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + v_C(\infty)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Dove:

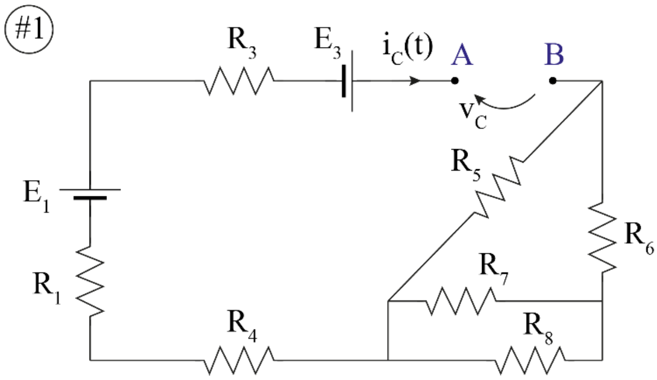
- $v_C(0)$ è la tensione ai capi di C prima della chiusura del tasto
- $v_C(\infty)$ è la tensione ai capi di C dopo la chiusura del tasto T, alla fine del transitorio.
- $\tau = R_{eq}C$ è la costante di tempo del transitorio che dipende dalla resistenza vista da C dopo la chiusura del tasto.

L'andamento temporale della corrente che interessa il condensatore è:

$$i_c(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = C\left(-\frac{v_C(0)}{R_{eq}C} + \frac{v_C(\infty)}{R_{eq}C}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{v_C(\infty) - v_C(0)}{R_{eq}}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

------ $v_C(0)$ --------

Prima che il tasto si chiuda, il circuito si trova a regime, per cui C si comporta da circuito aperto:



Troviamo la tensione $v_c(0)$ applicando la legge di Ohm tra i nodi A-B:

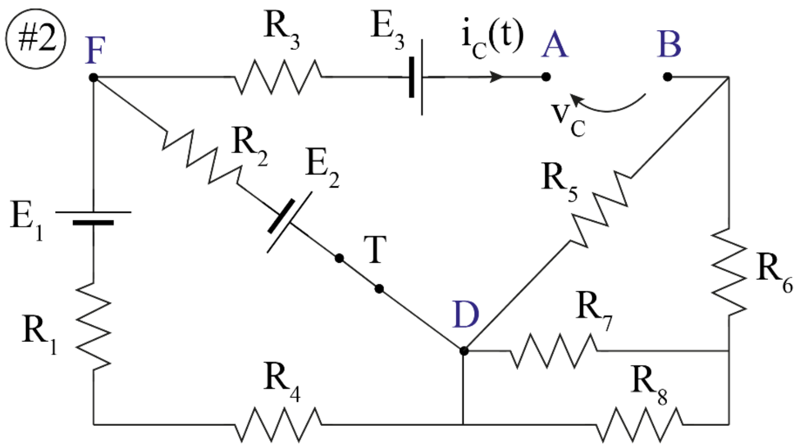
$$v_{AB} = v_C(0)$$

$$v_C(0) - E_3 - E_1 = 0$$

$$v_C(0) = E_3 + E_1 = 22\ V$$

------ $v_C(\infty)$ --------

Dopo la chiusura del tasto, concluso il transitorio, C si comporta nuovamente da circuito aperto.



R_4 è in serie a R_1: $R_{14} = R_1 + R_4 = 30\ \Omega$.

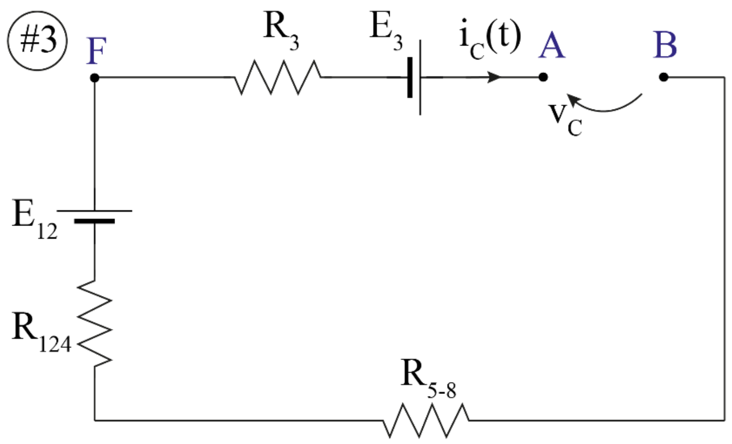
Applico il teorema di Millman tra i nodi F e D (#2), rispettando il verso imposto in #3:

$$E_{12} = \frac{\frac{E_1}{R_{14}} - \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_{14}} + \frac{1}{R_2}} = 0.634\ V \qquad R_{124} = \frac{1}{\frac{1}{R_{14}} + \frac{1}{R_2}} = 4.65\ \Omega$$

R_8 è in parallelo a R_7: $R_{78} = \frac{1}{\frac{1}{R_7}+\frac{1}{R_8}} = 4.31\ \Omega$.

R_{78} è in serie a R_6: $R_{678} = R_6 + R_{78} = 7.61\ \Omega$.

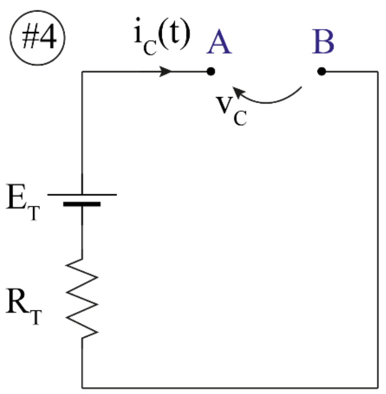
R_{678} è in parallelo a R_5: $R_{5-8} = \frac{1}{\frac{1}{R_{678}}+\frac{1}{R_5}} = 1.58\ \Omega$.



Facciamo la serie tra i due generatori reali indipendenti di tensione $E_{12} - R_{124}$ e $E_3 - R_3$ consideriamo anche che R_{5-8} è in serie, ottenendo:

$$E_T = E_{12} + E_3 = 7.63\ V.$$

$$R_T = R_{124} + R_{5-8} + R_3 = 9.53\ \Omega.$$



Troviamo la tensione $v_c(\infty)$ applicando la legge di Ohm tra i nodi A-B:

$$v_{AB} = v_C(\infty)$$

$$v_C(\infty) - E_T = 0$$

$$v_C(\infty) = E_T = \ 7.63\ V$$

La resistenza equivalente vista dal condensatore è $R_{eq} = R_T = 9.53\ \Omega$

La costante di tempo $\tau = R_{eq}C = 0.0238\ s$

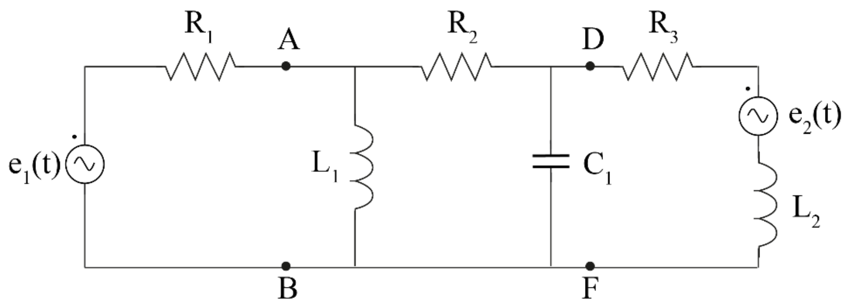
L’espressione temporale della tensione è:

$$v_C(t) = 22e^{-\frac{t}{0.0238}} + 7.63\left(1 - e^{-\frac{t}{0.0238}}\right)$$

L’espressione temporale della corrente è:

$$i_c(t) = \frac{7.63 - 22}{9.53} e^{-\frac{t}{0.0238}} = -1.5\, e^{-\frac{t}{0.0238}}\ \mathrm{A}$$

Esercizio 2



Passiamo al dominio dei fasori e scriviamo le impedenze:

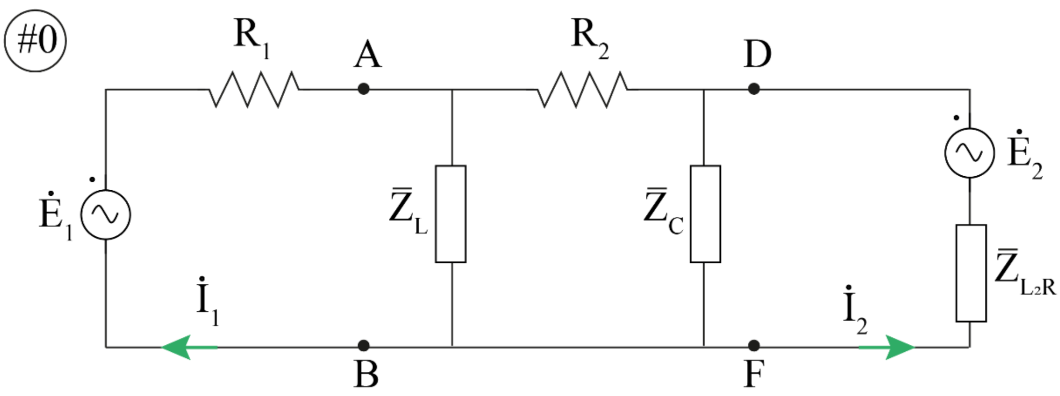
$\dot{E}_1 = 1.84 + j1.06 \text{ V}$

$\dot{E}_2 = 1.77 + j0.62 \text{ V}$

$\bar{Z}_L = j\omega L_1 = j0.785\ \Omega$

$\bar{Z}_C = -\frac{j}{\omega C1} = -j\ 0.159\ \Omega$

L_2 è in serie ad R_3: $\bar{Z}_{L_2R} = j\omega L_2 + R_3 = 5 + j4.71\ \Omega$

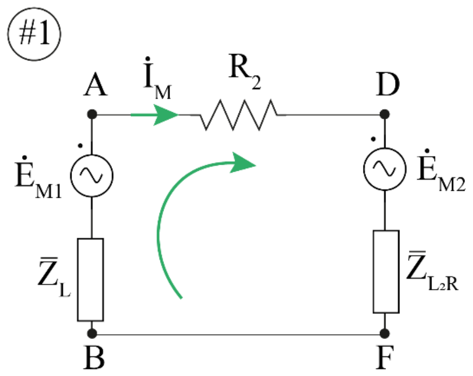


Applico il teorema di Millman tra i nodi A e B (#0):

$$\dot{E}_{M1} = \frac{\frac{\dot{E}_1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\bar{Z}_L}} = -0.115\ +\ j0.77\ V \qquad \bar{Z}_{M1} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\bar{Z}_L}} = \ 0.27\ +\ j0.68\ \Omega$$

Applico il teorema di Millman tra i nodi D e F (#0):

$$\dot{E}_{M2} = \frac{\frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_{L_2R}}}{\frac{1}{\bar{Z}_{L_2R}} + \frac{1}{\bar{Z}_C}} = 0.025 - j0.079\ V \qquad \bar{Z}_{M2} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_{L_2R}} + \frac{1}{\bar{Z}_C}} = 0.0028 - j0.16\ \Omega$$



Applico la legge alla maglia per trovare la corrente $\dot{I}_M$:

$$\dot{E}_{M1} - \dot{E}_{M2} = (\bar{Z}_{M1} + \bar{Z}_{M2} + R_2)\dot{I}_M$$

Dunque:

$$\dot{I}_M = \frac{\dot{E}_{M1} - \dot{E}_{M2}}{\bar{Z}_{M1} + \bar{Z}_{M2} + R_2} = -0.0088 + j0.1991\ \mathrm{A}$$

Applico la legge di Ohm tra A-B in #1 per trovare la tensione $\dot{V}_{AB}$:

$$\dot{V}_{AB} = \dot{E}_{M1} - \bar{Z}_{M1}\dot{I}_M = 0.0223 + j0.7192\ \mathrm{V}$$

Applico la legge di Ohm tra D-F in #1 per trovare la tensione $\dot{V}_{DF}$:

$$\dot{V}_{DF} = \dot{E}_{M2} + \bar{Z}_{M2}\dot{I}_M = 0.0575 - j0.0774\ \mathrm{V}$$

Applico la legge di Ohm tra A-B in #0 per trovare la correte $\dot{I}_1$:

$$\dot{V}_{AB} - \dot{E}_1 = -R\dot{I}_1$$

Dunque:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_{AB} - \dot{E}_1}{R} = -0.9074 - j0.1707\ \mathrm{A}$$

Applico la legge di Ohm tra D-F in #0 per trovare la correte $\dot{I}_2$:

$$\dot{V}_{DF} - \dot{E}_2 = -\dot{I}_1 \bar{Z}_{L_2R}$$

Dunque:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_{DF} - \dot{E}_2}{\bar{Z}_{L_2R}} = -0.4946 - j0.1619 \text{ A}$$

La potenza generata da $E_1 - R_1$:

$$P_{genE1} = \dot{E}_1 \breve{I}_1 = -1.8481 - j0.6488 \text{ W}$$

La potenza erogata da $E_1 - R_1$:

$$P_{erogE1} = \dot{V}_{AB} \breve{I}_1 = -0.1430 - j0.6488 \text{ W}$$

La potenza generata da $E_2 - L_2 - R_3$:

$$P_{genE2} = \dot{E}_2 \breve{I}_2 = -1.3702 - j1.2281 \text{ W}$$

La potenza erogata da $E_2 - L_2 - R_3$:

$$P_{erogE2} = \dot{V}_{DF} \breve{I}_2 = -0.0159 + j0.0476 \text{ W}$$