Compito di Elettrotecnica

6 maggio 2025

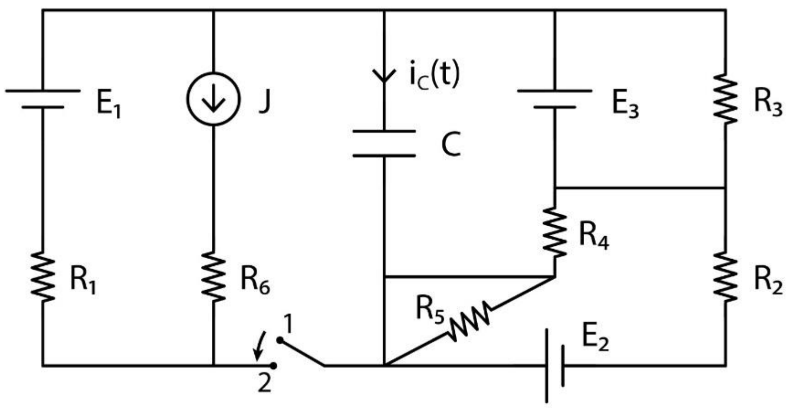
Nome e Cognome ………………………………………………………….. Matricola……………………

Corso di Laurea…………………………………………………

ES.1 – Il circuito in figura è a regime. Si richiede di determinare la **$i_c(t)$** che scorre sul condensatore C, supponendo che all'istante t=0sec il tasto si chiude. Inoltre, determinare la potenza generata da J prima e dopo la commutazione del tasto.

$$\mathbf{E_1 = 10\ V;\ E_2 = 5\ V;\ E_3 = 2\ V;\ J = 2.5\ A;\ \ R_1 = R_3 = 2\ \Omega;\ \ R_2 = R_6 = 4\ \Omega;\ \ R_4 = 5\ \Omega;}$$

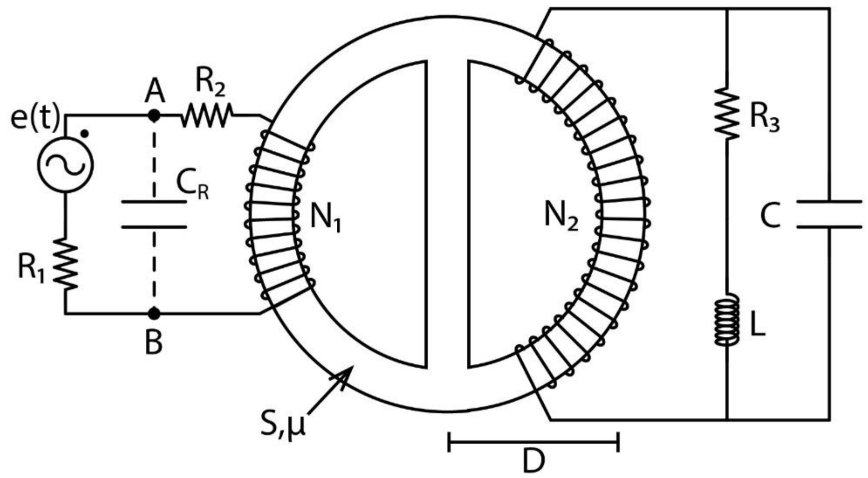
$$\mathbf{R_5 = 1\ \Omega;\ \ C = 0.1\ mF.}$$



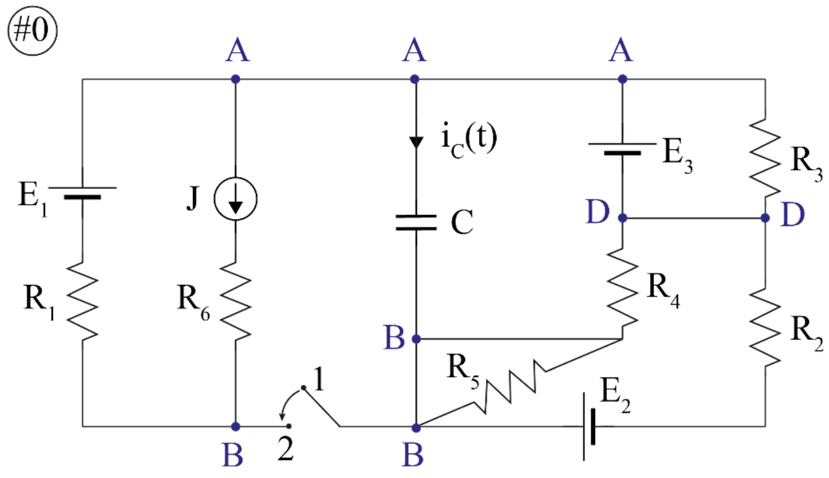
ES.2 – Il sistema rappresentato è a regime. Determinare il valore della capacità C_R da collegare tra i morsetti A e B per rifasare parzialmente il carico a valle della sezione.

$$\boldsymbol{e(t) = 2\sqrt{2}\sin\left(\mathrm{wt} + \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{V};\ \mu_r = 1000;\ R_1 = 2\ \Omega;\ R_2 = 3\ \Omega;\ R_3 = 5\ \Omega;\ \mathrm{L} = 0.3\mathrm{mH};\ \mathrm{w} = 100\mathrm{rad/sec}}$$

$$\boldsymbol{C = 5\ mF;\ \ \mathrm{N_1} = 100;\ N_2 = 200;\ S = 5\ cm^2,\ D = 2\ \mathrm{cm};\ \cos\varphi_R = 0.98}$$



Esercizio 1



L'andamento temporale della tensione ai capi del condensatore è:

$$v_C(t) = v_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + v_C(\infty)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Dove:

- $v_C(0)$ è la tensione ai capi di C prima della chiusura del tasto
- $v_C(\infty)$ è la tensione ai capi di C dopo la chiusura del tasto T, alla fine del transitorio.
- $\tau = R_{eq}C$ è la costante di tempo del transitorio che dipende dalla resistenza vista da C dopo la chiusura del tasto.

La andamento temporale della corrente che interessa il condensatore è:

$$i_c(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = C\left(-\frac{v_C(0)}{R_{eq}C} + \frac{v_C(\infty)}{R_{eq}C}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{v_C(\infty) - v_C(0)}{R_{eq}}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

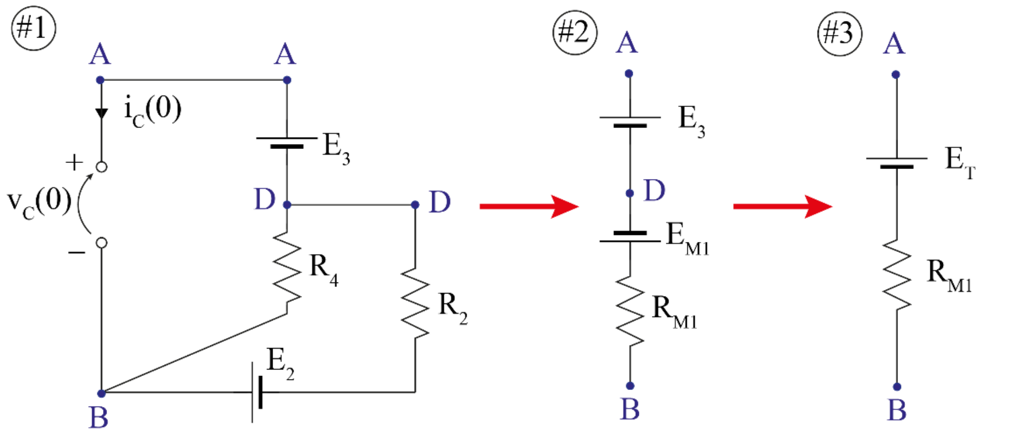
R_3 è trascurabile perché in parallelo ad un generatore ideale di tensione, quindi E_3 prevale .

R_5 è trascurabile perché in parallelo ad un cortocircuito.

R_6 è trascurabile perché in serie al generatore di corrente.

------ $v_C(0)$ --------

Prima che il tasto si chiuda, il circuito si trova a regime, per cui C si comporta da circuito aperto:



Applico il teorema di Millman tra i nodi B e D (#2):

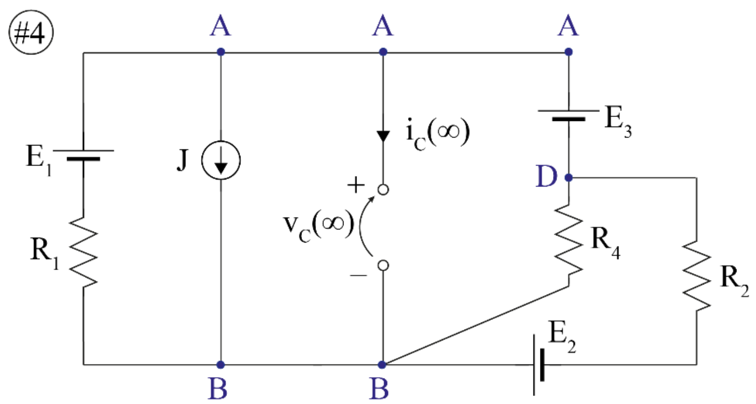
$$E_{M1} = \frac{\frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}} = 2.78\ V \qquad R_{M1} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}} = 2.22\ \Omega$$

Il generatore di Millman E_{M1} è in serie al generatore E_3 (#3), per cui la tensione $v_C(0)$ è:

$$v_C(0) = E_T = E_3 - E_{M1} = -0.78\ V$$

------ $v_C(\infty)$ --------

Dopo la chiusura del tasto, concluso il transitorio, C si comporta nuovamente da circuito aperto.



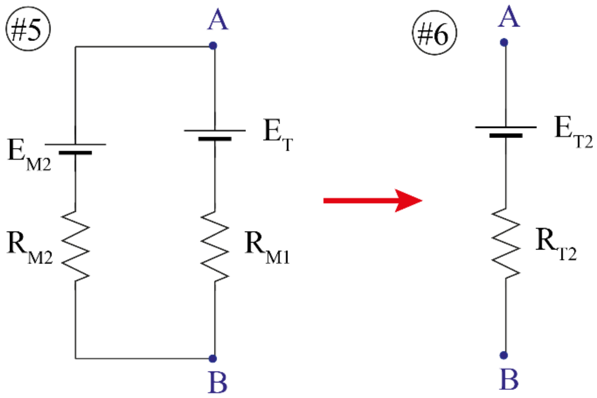
Applico il teorema di Millman tra i nodi A e B a destra del tasto (#5):

$$E_{M2} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - J}{\frac{1}{R_1}} = 5\ V \qquad R_{M2} = R_1 = 2\ \Omega$$

Il circuito a destra del condensatore si semplifica come in precedenza (#3).

Applico il teorema di Millman tra i nodi A e B (#6):

$$E_{T2} = \frac{\dfrac{E_{M2}}{R_{M2}} + \dfrac{E_T}{R_{M1}}}{\dfrac{1}{R_{M2}} + \dfrac{1}{R_{M1}}} = 3.95 \text{ V} \qquad R_{T2} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_{M2}} + \dfrac{1}{R_{M1}}} = 1.05\ \Omega$$



La tensione è $v_C(\infty) = E_{T2} = 3.95 \text{ V}$

La resistenza equivalente vista dal condensatore è $R_{eq} = R_{T2} = 1.05\ \Omega$

La costante di tempo $\tau = R_{eq}C = 1.05e^{-4}\ s$

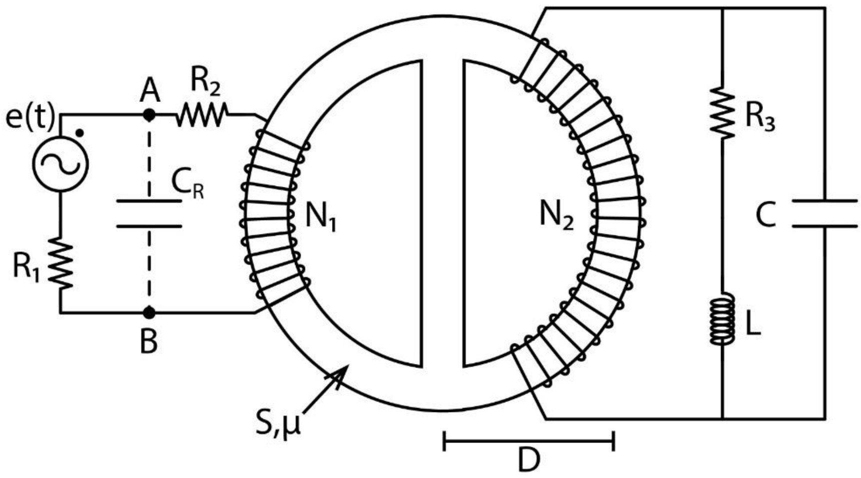
Per cui la corrente è:

$$i_c(t) = \frac{3.95 + 0.78}{1.05} e^{-\frac{t}{1.05e^{-4}}} = 4.5\ e^{-\frac{t}{1.05e^{-4}}} \text{ A}$$

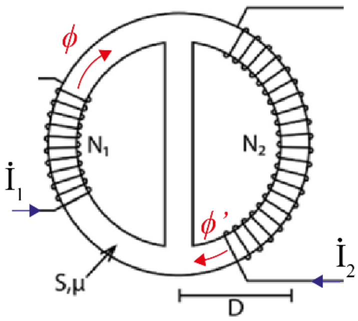
La potenza generata dal generatore di corrente J è:

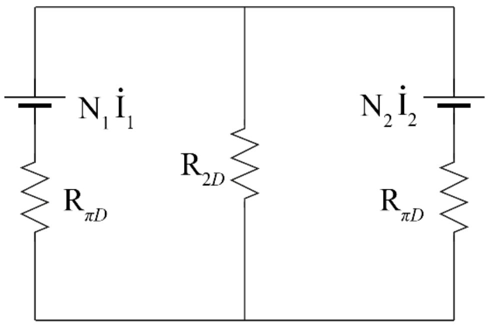
- prima della commutazione del tasto: $P_J = E_{M2}J = 12.5 \text{ W}$
- dopo la commutazione del tasto: $P_{J'} = E_{T2}J = 9.87 \text{ W}$

Esercizio 2



Trasformiamo il circuito magnetico nell’equivalente elettrico:





Calcoliamo le riluttanze equivalenti:

$$R_{2D} = \frac{2D}{\mu_0\mu_r S} = 6.36 \times 10^3 \ \mathrm{H}^{-1} \qquad R_{\pi D} = \frac{\pi D}{\mu_0\mu_r S} = 1 \times 10^4 \ \mathrm{H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_{eq} = \frac{R_{\pi D} * R_{2D}}{R_{\pi D} + R_{2D}} + R_{\pi D} = 1.39 \times 10^4 \ \mathrm{H}^{-1}$$

Calcoliamo i coefficienti di auto induzione:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{eq}} = 0.72 \ \mathrm{H} \qquad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{eq}} = 2.88 \ H$$

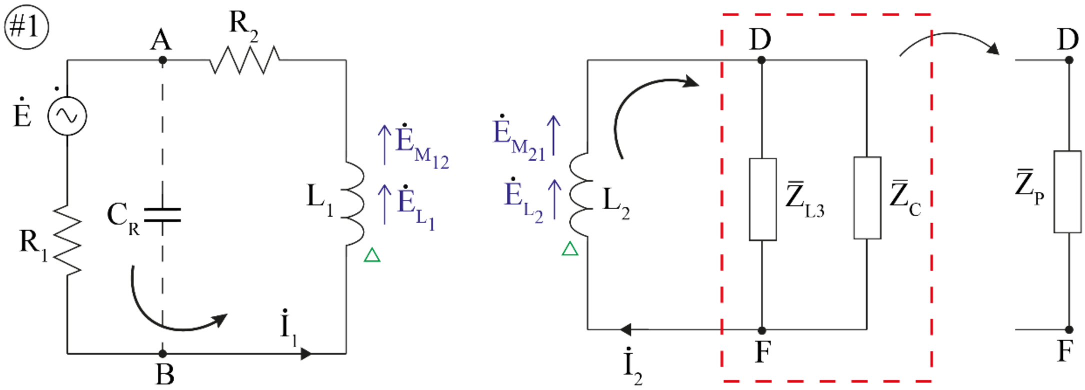
Calcoliamo i coefficienti di mutua induzione (tutte >0):

$$M_{12} = M_{21} = \alpha_{12} \frac{N_1 N_2}{R_{eq}} = 0.56 \ H$$

Dove α_{12} è il coefficiente di ripartizione dei flussi:

$$\alpha_{12} = \frac{R_{2D}}{R_{\pi D} + R_{2D}} = 0.389$$

Il circuito passando al dominio dei fasori diventa:



Dove:

$\dot{E} = j2$ V
$\bar{Z}_{L3} = R_3 + j\omega L = 5 + j10^5\ \Omega$ (impedenza equivalente tra R_3 e L)
$\bar{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} = -j2\ \Omega$

L'impedenza tra i nodi D ed F è data dal parallelo tra $\bar{Z}_{L3}$ e $\bar{Z}_C$:

$$\bar{Z}_P = \frac{\bar{Z}_{L3}\bar{Z}_C}{\bar{Z}_{L3} + \bar{Z}_C} = -j2\ \Omega$$

Calcoliamo le correnti $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$ risolvendo il sistema costituito dalle equazioni alle due maglie (la maglia a sinistra è percorsa in senso antiorario, mentre quella a destra in senso orario):

$$\begin{cases} \dot{E}_{L_1} + \dot{E}_{M_{12}} - \dot{E} = (R_1 + R_2)\,\dot{I}_1 \\ \dot{E}_{L_2} + \dot{E}_{M_{21}} = \bar{Z}_P \dot{I}_2 \end{cases}$$

Sostituendo le varie f.e.m. e tenendo presente che le mutue sono > 0 abbiamo:

$$\begin{cases} -j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M_{12}\dot{I}_2 - \dot{E} = (R_1 + R_2)\dot{I}_1 \\ -j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M_{21}\dot{I}_1 = \bar{Z}_P \dot{I}_2 \end{cases}$$

Da cui ricaviamo:

$$\dot{I}_1 = 0.0326 + j0.0027 \text{ A} \qquad \dot{I}_2 = -0.0064 - j0.0005 \text{ A}$$

Per il calcolo della capacità da inserire tra A e B per rifasare parzialmente in carico, calcolo la potenza complessa tra A e B: $\bar{S}_{AB} = \dot{V}_{AB}\check{I}_1$

Dalla legge di Ohm generalizzata ricavo la $\dot{V}_{AB}$:

$$\dot{V}_{AB} = \dot{E} + R\dot{I}_1 = 0.0651 + j2.0053\, V$$

La potenza complessa è: $\bar{S}_{AB} = P_{AB} + jQ_{AB} = 0.0075 + j0.0651 \text{ VAC}$

La potenza attiva $P_{AB} = \; 0.0075 \text{ W}$

La potenza reattiva $Q_{AB} = 0.0651 \text{ VAR}$

Da cui si ricava che l'angolo è: $\varphi_C = \text{atan}\left(\frac{Q_{AB}}{P_{AB}}\right) = 83.46°$

L'angolo richiesto è: $\varphi = \text{acos}(0.98) = 11.48°$

Essendo $\varphi_C > \; \varphi$ bisogna rifasare:

$$C_R = \frac{Q_{AB} - P_{AB}\tan(\varphi)}{\omega V_{AB}^2} = 1.58 \times 10^{-4}\, F$$

Dove $V_{AB} = |\dot{V}_{AB}|$