

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Sistemi Trifase

Capitolo 8 – Studio Generale dei Sistemi Trifase

Anno Accademico 2022-2023

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:

Lezioni di Elettrotecnica Generale - Giulio Battistini

Colombo Corsi Pisa

M. Fauri “Electrical Systems Engineering” Lezione 9

8 Studio generale dei sistemi trifase

8.1 Rappresentazione matriciale delle grandezze trifase

In simboli matriciali, una terna qualsiasi di vettori ($\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3$) è normalmente rappresentata mediante la *matrice colonna* i cui elementi sono i vettori stessi della terna:

$$\|\dot{A}\| = \begin{bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix}$$

Solo per alcuni calcoli, la terna viene anche rappresentata mediante la relativa *matrice riga*:

$$\|\dot{A}\| = |\dot{A}_1 \quad \dot{A}_2 \quad \dot{A}_3|$$

Quindi nella rappresentazione matriciale, le terne delle tensioni ($\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$) e delle correnti ($\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$) di un circuito trifase (figura 51a) sono normalmente indicate mediante i simboli:

$$\|\dot{V}\| = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix} \qquad \|\dot{I}\| = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}$$

che rispettivamente sono *matrice colonna delle tensioni* e *matrice colonna delle correnti*.

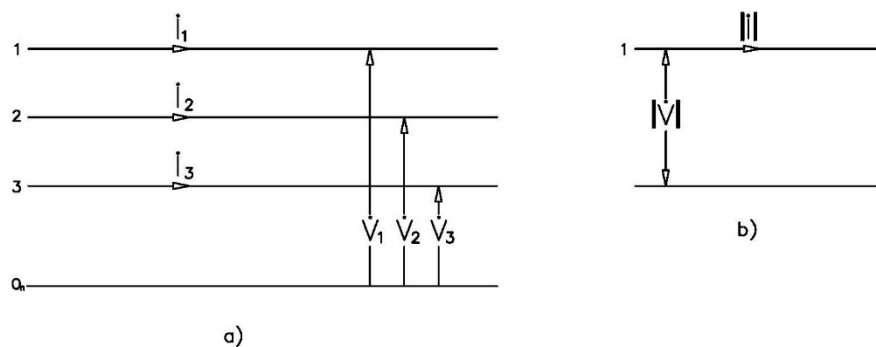


Figura 51

È evidente perciò come sia possibile, qualora fosse utile, rappresentare il sistema trifase mediante uno *schema monofase equivalente* (figura 51b) dove le grandezze sono rappresentate da matrici di vettori.

8.1.1 Somma di terne di vettori:

$$(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3) + (\dot{B}_1, \dot{B}_2, \dot{B}_3) = (\dot{A}_1 + \dot{B}_1, \dot{A}_2 + \dot{B}_2, \dot{A}_3 + \dot{B}_3)$$

in forma matriciale:

$$\|A\| + \|B\| = \begin{bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \\ \dot{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}_1 + \dot{B}_1 \\ \dot{A}_2 + \dot{B}_2 \\ \dot{A}_3 + \dot{B}_3 \end{bmatrix} = \|A + B\|$$

Ad esempio, le correnti di una linea trifase che convoglia le correnti di due linee in parallelo (figura 52a), nella rappresentazione matriciale si esprimono:

$$\|I_A\| + \|I_B\| = \begin{bmatrix} I_{A1} \\ I_{A2} \\ I_{A3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{B1} \\ I_{B2} \\ I_{B3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{A1} + I_{B1} \\ I_{A2} + I_{B2} \\ I_{A3} + I_{B3} \end{bmatrix} = \|I_A + I_B\|$$

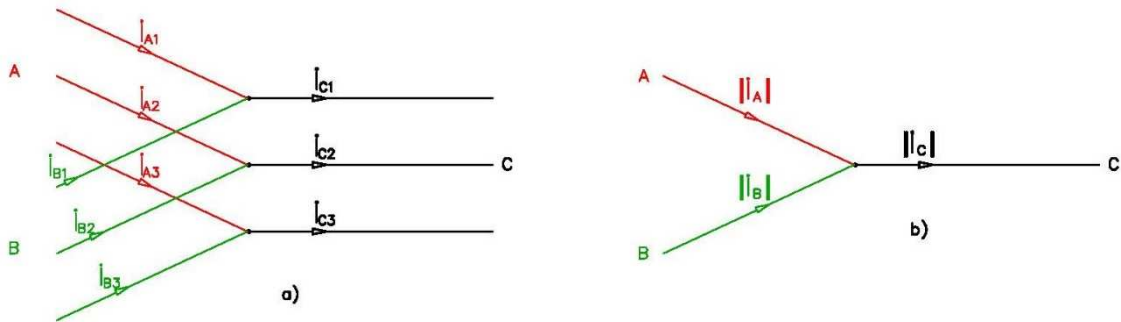


Figura 52

Che possono dar luogo, ovviamente, allo schema monofase equivalente di figura 52b.

8.1.2 Prodotto di una terna di vettori per un numero:

$$k \cdot (\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3) = (k\dot{A}_1, k\dot{A}_2, k\dot{A}_3)$$

in forma matriciale:

$$k \cdot \|\dot{A}\| = \begin{bmatrix} k\dot{A}_1 \\ k\dot{A}_2 \\ k\dot{A}_3 \end{bmatrix} = \|k\dot{A}\|$$

Ad esempio le tensioni $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$, agli estremi delle fasi di un *carico equilibrato*, di impedenza per fase $\bar{Z}$, le cui correnti sono $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ e $\dot{I}_3$ (figura 53a),

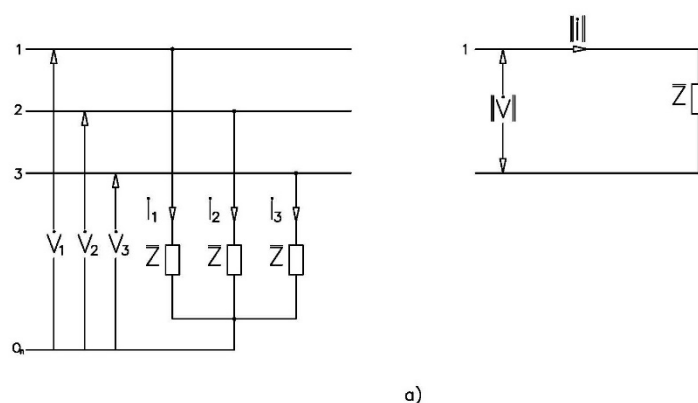


Figura 53a

possono esprimersi in forma matriciale come:

$$\|\dot{V}\| = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}\dot{I}_1 \\ \bar{Z}\dot{I}_2 \\ \bar{Z}\dot{I}_3 \end{bmatrix} = \bar{Z} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \bar{Z} \|\dot{I}\|$$

E quindi mediante il relativo schema monofase equivalente.

8.1.3 Prodotto di una terna di vettori per una terna di numeri:

$$(k_1, k_2, k_3) \cdot (\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3) = (k_1 \dot{A}_1, k_2 \dot{A}_2, k_3 \dot{A}_3)$$

in forma matriciale questo risultato si ottiene moltiplicando la *matrice diagonale* formata con la terna dei numeri k_1, k_2, k_3 :

$$\|k\| = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{vmatrix}$$

per la matrice colonna della terna dei vettori

$$\|k\| \cdot \|\dot{A}\| = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 \dot{A}_1 \\ k_2 \dot{A}_2 \\ k_3 \dot{A}_3 \end{vmatrix}$$

Ad esempio le tensioni $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$, agli estremi delle fasi di un *carico squilibrato* $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$, percorso dalle correnti $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ e $\dot{I}_3$ (figura 53b),

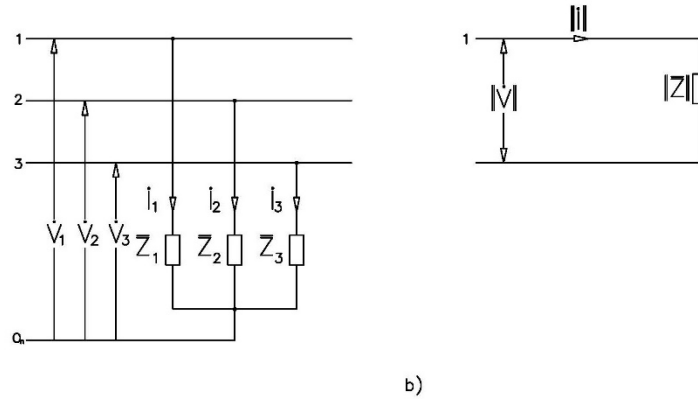


Figura 53

sono rappresentate in forma matriciale:

$$\|\dot{V}\| = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 \dot{I}_1 \\ \bar{Z}_2 \dot{I}_2 \\ \bar{Z}_3 \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \|\bar{Z}\| \cdot \|\dot{I}\|$$

dove $\|\bar{Z}\|$ è la *matrice diagonale delle impedenze del carico*.

8.1.4 Prodotto di una terna di vettori per una tripla terna di numeri:

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \cdot (\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3) = \\ = [(k_{11}\dot{A}_1 + k_{12}\dot{A}_2 + k_{13}\dot{A}_3) \quad (k_{21}\dot{A}_1 + k_{22}\dot{A}_2 + k_{23}\dot{A}_3) \quad (k_{31}\dot{A}_1 + k_{32}\dot{A}_2 + k_{33}\dot{A}_3)]$$

in forma matriciale:

$$\|k\| \cdot \|\dot{A}\| = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}\dot{A}_1 + k_{12}\dot{A}_2 + k_{13}\dot{A}_3 \\ k_{21}\dot{A}_1 + k_{22}\dot{A}_2 + k_{23}\dot{A}_3 \\ k_{31}\dot{A}_1 + k_{32}\dot{A}_2 + k_{33}\dot{A}_3 \end{bmatrix}$$

Questo calcolo, nei sistemi trifase, è quello che si esegue per calcolare la tensione agli estremi delle fasi di un *carico con accoppiamento induttivo fra fase e fase* (figura 54)

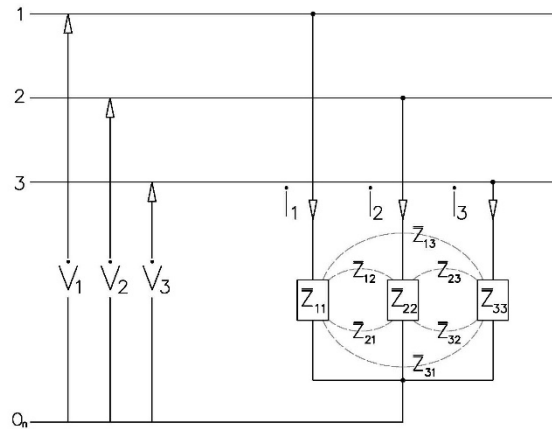


Figura 54

Infatti, indicando con $\bar{Z}_{11}, \bar{Z}_{22}, \bar{Z}_{33}$ le impedenze proprie delle fasi (**auto impedenze**) e con $\bar{Z}_{hk}$ il coefficiente di mutua induzione della fase h rispetto alla fase k moltiplicato per $j\omega$ (**mutue impedenze**), si ha:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 + \bar{Z}_{13}\dot{I}_3 \\ \dot{V}_2 &= \bar{Z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2 + \bar{Z}_{23}\dot{I}_3 \\ \dot{V}_3 &= \bar{Z}_{31}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{32}\dot{I}_2 + \bar{Z}_{33}\dot{I}_3\end{aligned}$$

per cui, in forma matriciale, la terna delle tensioni è legata alla terna delle correnti dalla relazione:

$$\|\dot{V}\| = \|\bar{Z}\| \cdot \|\dot{I}\|$$

dove

$$\|\bar{Z}\| = \begin{vmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} & \bar{Z}_{13} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \bar{Z}_{23} \\ \bar{Z}_{31} & \bar{Z}_{32} & \bar{Z}_{33} \end{vmatrix}$$

Si dice *matrice quadrata delle auto e mutue impedenze*.

Come è facile rilevare dalle equazioni precedenti, i nove valori delle auto e mutue impedenze, che costituiscono gli elementi della matrice, possono essere determinati sperimentalmente con semplici misure, inviando successivamente una corrente in ciascuna fase e misurando ogni volta le tensioni.

Indicando con

- $\dot{V}_{11}^*, \dot{V}_{21}^*$ e $\dot{V}_{31}^*$ le tensioni misurate quando la sola fase 1 è percorsa dalla corrente $\dot{I}_1^*$;
- $\dot{V}_{12}^*, \dot{V}_{22}^*$ e $\dot{V}_{32}^*$ le tensioni misurate quando la sola fase 2 è percorsa dalla corrente $\dot{I}_2^*$;
- $\dot{V}_{13}^*, \dot{V}_{23}^*$ e $\dot{V}_{33}^*$ le tensioni misurate quando la sola fase 3 è percorsa dalla corrente $\dot{I}_3^*$

dal sistema scritto prima:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 + \bar{Z}_{13}\dot{I}_3 \\ \dot{V}_2 &= \bar{Z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2 + \bar{Z}_{23}\dot{I}_3 \\ \dot{V}_3 &= \bar{Z}_{31}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{32}\dot{I}_2 + \bar{Z}_{33}\dot{I}_3\end{aligned}$$

abbiamo che le auto e mutue impedenze del sistema sono:

$$\begin{array}{ll} \dot{V}_{11}^* = \bar{Z}_{11} i_1^* & \bar{Z}_{11} = \frac{\dot{V}_{11}^*}{i_1^*} \\ \text{a) } \dot{V}_{21}^* = \bar{Z}_{21} i_1^* & \text{da cui } \bar{Z}_{21} = \frac{\dot{V}_{21}^*}{i_1^*} \\ \dot{V}_{31}^* = \bar{Z}_{31} i_1^* & \bar{Z}_{31} = \frac{\dot{V}_{31}^*}{i_1^*} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \dot{V}_{12}^* = \bar{Z}_{12} i_2^* & \bar{Z}_{12} = \frac{\dot{V}_{12}^*}{i_2^*} \\ \text{b) } \dot{V}_{22}^* = \bar{Z}_{22} i_2^* & \text{da cui } \bar{Z}_{22} = \frac{\dot{V}_{22}^*}{i_2^*} \\ \dot{V}_{32}^* = \bar{Z}_{32} i_2^* & \bar{Z}_{32} = \frac{\dot{V}_{32}^*}{i_2^*} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \dot{V}_{13}^* = \bar{Z}_{13} i_3^* & \bar{Z}_{13} = \frac{\dot{V}_{13}^*}{i_3^*} \\ \text{c) } \dot{V}_{23}^* = \bar{Z}_{23} i_3^* & \text{da cui } \bar{Z}_{23} = \frac{\dot{V}_{23}^*}{i_3^*} \\ \dot{V}_{33}^* = \bar{Z}_{33} i_3^* & \bar{Z}_{33} = \frac{\dot{V}_{33}^*}{i_3^*} \end{array}$$

8.1.5 Rappresentazione matriciale della legge di Ohm, dei principi di Kirchhoff e della potenza trifase

Riassumendo le precedenti considerazioni, si rileva che la legge di Ohm per i sistemi trifase può essere espressa in forma matriciale come:

$$\|\dot{V}\| = \|\bar{Z}\| \cdot \|\dot{I}\|$$

Ed esprime il legame fra le grandezze di fase. La matrice quadrata delle auto e mutue impedenze si riduce alla matrice diagonale nel caso di carichi privi di accoppiamento induttivo ed al solo valore $\bar{Z}$ delle impedenze nel caso di carichi equilibrati

Carichi con accoppiamenti induttivi fra le fasi		Carichi senza accoppiamenti induttivi fra le fasi	
		Carichi squilibrati	Carichi equilibrati
$\ \dot{V}\ = \ \bar{Z}\ \cdot \ \dot{I}\ $		$\ \dot{V}\ = \ \bar{Z}\ \cdot \ \dot{I}\ $	$\ \dot{V}\ = \bar{Z} \cdot \ \dot{I}\ $
$\ \bar{Z}\ = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} & \bar{Z}_{13} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \bar{Z}_{23} \\ \bar{Z}_{31} & \bar{Z}_{32} & \bar{Z}_{33} \end{bmatrix}$		$\ \bar{Z}\ = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z}_{33} \end{bmatrix}$	$\bar{Z} = \bar{Z}_{11} = \bar{Z}_{22} = \bar{Z}_{33}$
Matrice quadrata delle auto e mutue impedenze		Matrice diagonale delle impedenze	Valore comune delle impedenze

Estendendo le considerazioni sulla somma di due terne di correnti, illustrate nella figura 29, ad un numero qualsiasi di terne ed indicando con $\dot{I}_1^{(k)}, \dot{I}_2^{(k)}, \dot{I}_3^{(k)}$ le correnti della terna k-sima (per il segno valgono le convenzioni dei nodi nei sistemi monofase), il *primo principio di Kirchhoff* applicato ad un nodo di una rete trifase può essere espresso in forma matriciale dalla relazione:

$$\sum_k \|\dot{I}^{(k)}\| = 0$$

Considerando poi una maglia di una rete trifase nella quale $\dot{V}_1^{(k)}, \dot{V}_2^{(k)}, \dot{V}_3^{(k)}, \dot{I}_1^{(k)}, \dot{I}_2^{(k)}, \dot{I}_3^{(k)}, \bar{Z}_1^{(k)}, \bar{Z}_2^{(k)}, \bar{Z}_3^{(k)}$ siano rispettivamente le tensioni, le correnti e le impedenze relative alle tre fasi (con o senza accoppiamento induttivo) del lato k-simo della maglia (adottando per il segno delle tensioni e delle correnti le stesse convenzioni adottate per le maglie dei circuiti monofase) il *secondo principio di Kirchhoff* si esprime in forma matriciale con la relazione:

$$\sum_k (\|\dot{V}^{(k)}\| - \|\bar{Z}^{(k)}\| \cdot \|\dot{I}^{(k)}\|) = 0$$

Infine, sappiamo che il regime energetico di un sistema trifase può essere compiutamente definito mediante la potenza complessa:

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = P_1 + jQ_1 + P_2 + jQ_2 + P_3 + jQ_3 = \dot{V}_1 \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_2 \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_3 \cdot \dot{I}_3$$

Rappresentando la potenza mediante matrice ad un solo elemento, si rileva che essa è uguale al prodotto di una matrice riga per una matrice colonna:

$$|\bar{S}| = |\dot{V}_1 \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_2 \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_3 \cdot \dot{I}_3| = \begin{vmatrix} \dot{V}_1 & \dot{V}_2 & \dot{V}_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{vmatrix} = \|\dot{V}\| \cdot \|\dot{I}\|$$

Pertanto, in forma matriciale, la potenza complessa di un qualsiasi sistema trifase è rappresentata dal prodotto della matrice riga delle tensioni per la matrice colonna dei coniugati delle correnti.

8.2 L'algebra delle sequenze

I moderni metodi di analisi per lo studio generale del comportamento dei sistemi trifase (simmetrici, dissimmetrici, equilibrati, squilibrati, puri o spuri) sono basati su procedimenti di scomposizione dei sistemi trifase di grandezze in *terne componenti*, la cui somma riproduce il sistema considerato.

L'efficacia di tali metodologie consiste dalla possibilità da esse offerta, una volta operata la scomposizione, di determinare disgiuntamente il comportamento del sistema in presenza di ognuna delle componenti, indipendentemente dalle altre, e di ricostruire poi il regime globale del sistema applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.

Il procedimento di scomposizione dei sistemi trifase più usato è quello di **Fortescue**. In esso due delle componenti sono *terne simmetriche*.

Allo scopo di rendere più agile e rapido il calcolo, faremo uso di un particolare metodo di rappresentazione delle terne simmetriche di grandezze, indicato comunemente con il nome di **algebra delle sequenze**.

Fra i vari *fattori di rotazione* visti, occorre menzionare in particolare il fattore che, *applicato ad un vettore, ne ruota la direzione di 120° in anticipo, lasciandone immutata l'intensità*. Questo fattore, che indicheremo con α è rappresentato dal numero complesso costante:

$$\alpha = e^{j\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il cui complesso coniugato è ovviamente:

$$\check{\alpha} = e^{-j\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le successive potenze di α con esponente intero:

$$\begin{array}{lll} \alpha^0 = 1 & \alpha^3 = e^{j\frac{6}{3}\pi} = 1 & \alpha^6 = e^{j\frac{12}{3}\pi} = 1 \\ \alpha^1 = e^{j\frac{2}{3}\pi} & \alpha^4 = e^{j\frac{8}{3}\pi} = \alpha & \alpha^7 = e^{j\frac{14}{3}\pi} = \alpha \\ \alpha^2 = e^{j\frac{4}{3}\pi} & \alpha^5 = e^{j\frac{10}{3}\pi} = \alpha^2 & \alpha^8 = e^{j\frac{16}{3}\pi} = \alpha^2 \end{array}$$

Riproducono ciclicamente all'infinito sempre la stessa terna di valori:

$$\begin{array}{l} \alpha^0 = 1 \\ \alpha = e^{j\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha^2 = e^{j\frac{4}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \check{\alpha} \end{array}$$

Che, riportati sul piano di Gauss (figura 55), corrispondono ai vertici di un triangolo equilatero e che rappresentano *le tre radici cubiche dell'unità*.

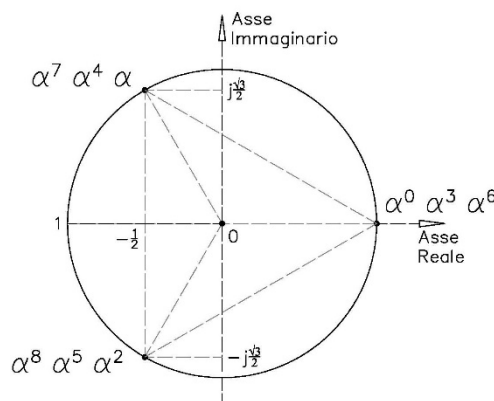


Figura 55

Ricordando che le radici cubiche dell'unità, dovendo soddisfare la relazione:

$$x^3 = 1$$

Coincidono con le radici dell'equazione.

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

dalla quale, annullando il primo fattore si ottiene:

$$x_1 = 1$$

ed annullando il secondo:

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

È facile rilevare che tale terna di numeri gode della proprietà che la loro somma è nulla:

$$\begin{aligned} \alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 &= 1 + \alpha + \alpha^2 = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + j\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Consideriamo le tre potenze di α ($1; \alpha; \alpha^2$) che, al crescere dell'esponente, si riproducono ciclicamente all'infinito. I loro punti rappresentativi sul piano di Gauss si susseguono, lungo la circonferenza unitaria, secondo il *senso di rotazione orario* (figura 56) quando le potenze si succedono nell'ordine:

$$1; \alpha^2; \alpha$$

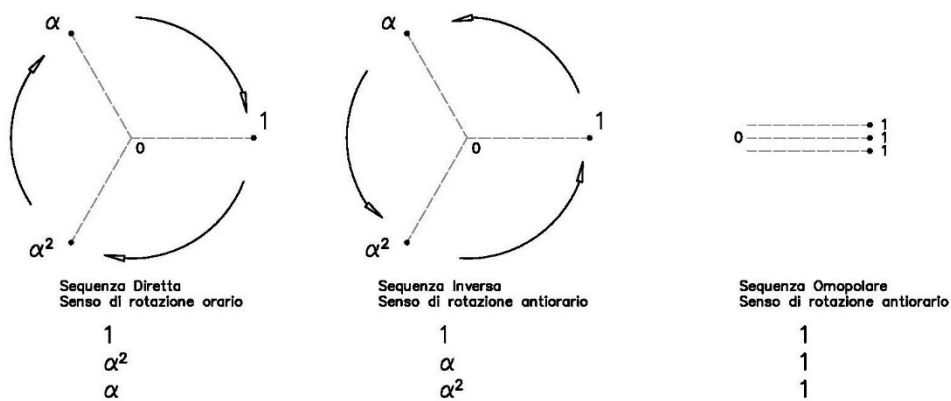


Figura 56

Si susseguono invece secondo il senso di rotazione antiorario quando le potenze si succedono nell'ordine.

$$1; \alpha; \alpha^2$$

Chiameremo allora **sequenza diretta** (S_d) la terna dei tre fattori di rotazione rappresentati dalle potenze di α prese nella successione corrispondente al senso orario e **sequenza inversa** (S_i), la stessa terna presa nella successione corrispondente al senso antiorario.

In simboli matriciali, esse sono rappresentate da due matrici colonna i cui elementi sono fattori di rotazione:

$$\|S_d\| = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \|S_i\| = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

Chiameremo, infine, **sequenza omopolare** (S_o) la terna costituita da tre elementi tutti uguali all'unità:

$$\|S_o\| = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il prodotto di una sequenza per un vettore è costituito dalla terna di vettori ottenuti applicando al vettore dato ognuno dei tre fattori di rotazione della sequenza.

Pertanto se la sequenza è diretta, il prodotto è costituito da una terna simmetrica di vettori che si susseguono nell'ordine ciclico diretto e che ha come primo vettore il vettore dato $\dot{\mathcal{A}}_d$

$$\|S_d\| \cdot \dot{\mathcal{A}}_d = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathcal{A}}_d = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_d \\ \alpha^2 \dot{\mathcal{A}}_d \\ \alpha \dot{\mathcal{A}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_d \\ \dot{\mathcal{A}}_d e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ \dot{\mathcal{A}}_d e^{-j\frac{4}{3}\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_{d1} \\ \dot{\mathcal{A}}_{d2} \\ \dot{\mathcal{A}}_{d3} \end{bmatrix} = \|\dot{\mathcal{A}}_d\|$$

Se la sequenza è inversa, il prodotto è costituito da una terna simmetrica di vettori che si susseguono nell'ordine ciclico inverso e che ha come primo vettore il vettore dato $\dot{\mathcal{A}}_i$

$$\|S_i\| \cdot \dot{\mathcal{A}}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathcal{A}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_i \\ \alpha \dot{\mathcal{A}}_i \\ \alpha^2 \dot{\mathcal{A}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_i \\ \dot{\mathcal{A}}_i e^{-j\frac{4}{3}\pi} \\ \dot{\mathcal{A}}_i e^{-j\frac{2}{3}\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_{i1} \\ \dot{\mathcal{A}}_{i2} \\ \dot{\mathcal{A}}_{i3} \end{bmatrix} = \|\dot{\mathcal{A}}_i\|$$

Se infine la sequenza è omopolare, il prodotto è costituito da una terna di vettori tutti uguali al vettore dato $\dot{\mathcal{A}}_o$

$$\|S_o\| \cdot \dot{\mathcal{A}}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathcal{A}}_o = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_o \\ \dot{\mathcal{A}}_o \\ \dot{\mathcal{A}}_o \end{bmatrix} = \|\dot{\mathcal{A}}_o\|$$

Le precedenti considerazioni indicano chiaramente la possibilità di rappresentare ogni terna di vettori di sequenza diretta, inversa o omopolare, mediante il prodotto della relativa sequenza per uno qualsiasi dei vettori della terna scelto ad arbitrio. Il vettore scelto come riferimento, il cui prodotto per la sequenza dà luogo all'intera terna, sarà chiamato **vettore base** della terna.

Per gli usi pratici è di fondamentale importanza la considerazione della **matrice quadrata delle sequenze o matrice del Fortescue**. Essa si ottiene formando una matrice quadrata con le tre matrici colonna rappresentative delle sequenze S_o, S_d e S_i :

$$\|S\| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

La matrice è simmetrica e il suo determinante ha valore:

$$|S| = 1(\alpha^2 \cdot \alpha^2 - \alpha \cdot \alpha) - 1(1 \cdot \alpha^2 - \alpha \cdot 1) + 1(1 \cdot \alpha - \alpha^2 \cdot 1) = \alpha^4 - \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha + \alpha - \alpha^2 = \alpha^4 - 3\alpha^2 + 2\alpha$$

Ricordando che $\alpha^4 = \alpha$ otteniamo:

$$\begin{aligned} |S| &= \alpha^4 - 3\alpha^2 + 2\alpha = \alpha - 3\alpha^2 + 2\alpha = 3\alpha - 3\alpha^2 = 3(\alpha - \alpha^2) = \\ &= 3 \left[\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = 3 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3j\sqrt{3} \end{aligned}$$

La matrice che si ottiene dalla precedente scambiando di posto la seconda con la terza riga (oppure la seconda con la terza colonna) e dividendo per 3, è la matrice inversa della precedente e si chiama **matrice quadrata inversa delle sequenze** (vedasi nota seguente).

$$\|S\|^{-1} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix}$$

Si ha, infatti, ricordando che il prodotto di una matrice per la sua inversa è uguale alla matrice identità

$$\begin{aligned} \|S\| \cdot \|S\|^{-1} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1+1+1 & 1+\alpha+\alpha^2 & 1+\alpha^2+\alpha \\ 1+\alpha^2+\alpha & 1+1+1 & 1+\alpha+\alpha^2 \\ 1+\alpha+\alpha^2 & 1+\alpha^2+\alpha & 1+1+1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \|U\| \end{aligned}$$

Nota:

La matrice quadrata delle sequenze è:

$$\|S\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

Per invertirla calcoliamo tutti i minori:

$$\begin{aligned} a_{11} &= + \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} = +\alpha^4 - \alpha^2 = \alpha - \alpha^2 \\ a_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = -\alpha^2 + \alpha \\ a_{13} &= + \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = +\alpha - \alpha^2 \\ a_{21} &= - \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = -\alpha^2 + \alpha \\ a_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = +\alpha^2 - 1 \\ a_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha + 1 \\ a_{31} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix} = +\alpha - \alpha^2 \\ a_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha + 1 \\ a_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = +\alpha^2 - 1 \end{aligned}$$

Matrice costruita con i minori

$$\begin{vmatrix} +\alpha^4 - \alpha^2 & -\alpha^2 + \alpha & +\alpha - \alpha^2 \\ -\alpha^2 + \alpha & +\alpha^2 - 1 & -\alpha + 1 \\ +\alpha - \alpha^2 & -\alpha + 1 & +\alpha^2 - 1 \end{vmatrix}$$

Trasposta della matrice dei minori

$$\begin{vmatrix} +\alpha^4 - \alpha^2 & -\alpha^2 + \alpha & +\alpha - \alpha^2 \\ -\alpha^2 + \alpha & +\alpha^2 - 1 & -\alpha + 1 \\ +\alpha - \alpha^2 & -\alpha + 1 & +\alpha^2 - 1 \end{vmatrix}$$

essendo:

$$\begin{aligned}\alpha &= e^{j\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha^2 &= e^{j\frac{4}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha^4 &= \alpha = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}+\alpha^4 - \alpha^2 &= \alpha - \alpha^2 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = j\sqrt{3} \\ -\alpha^2 + \alpha &= +\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = j\sqrt{3} \\ +\alpha^2 - 1 &= -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = j\sqrt{3}\left(j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = j\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = j\sqrt{3}\alpha \\ -\alpha + 1 &= +\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = +\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = +\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = j\sqrt{3}\left(-j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = j\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = j\sqrt{3}\alpha^2\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{vmatrix} j\sqrt{3} & j\sqrt{3} & j\sqrt{3} \\ j\sqrt{3} & j\sqrt{3}\alpha & j\sqrt{3}\alpha^2 \\ j\sqrt{3} & j\sqrt{3}\alpha^2 & j\sqrt{3}\alpha \end{vmatrix}$$

e dividendo per il determinante della matrice quadrata delle sequenze $j3\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{j3\sqrt{3}} \begin{vmatrix} j\sqrt{3} & j\sqrt{3} & j\sqrt{3} \\ j\sqrt{3} & j\sqrt{3}\alpha & j\sqrt{3}\alpha^2 \\ j\sqrt{3} & j\sqrt{3}\alpha^2 & j\sqrt{3}\alpha \end{vmatrix}$$

Otteniamo la matrice quadrata inversa delle sequenze:

$$\|S\|^{-1} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix}$$

8.3 Scomposizione di un sistema trifase di grandezze

Come già detto, fra i vari metodi di scomposizione dei sistemi trifase di grandezze in terne componenti, utilizzeremo il metodo del Fortescue, nel quale le tre componenti sono costituite da due terne simmetriche e da una omopolare. Questo metodo è basato sul **teorema del Fortescue**, il quale afferma che: *ogni terna di vettori qualsiasi è sempre univocamente scomponibile in tre terne, una di sequenza omopolare, una di sequenza diretta ed una di sequenza inversa*.

Vale a dire che data una terna qualsiasi di vettori $(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3)$, esiste sempre uno ed uno solo sistema di tre vettori $\dot{\mathcal{A}}_o, \dot{\mathcal{A}}_d, \dot{\mathcal{A}}_i$, i quali considerati come vettori basi di tre terne rispettivamente di sequenza omopolare, diretta e inversa, danno luogo a tre terne $\|S_o\| \cdot \dot{\mathcal{A}}_o, \|S_d\| \cdot \dot{\mathcal{A}}_d$ e $\|S_i\| \cdot \dot{\mathcal{A}}_i$, la cui somma riproduce la terna data $(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3)$.

$$\begin{bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_o + \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_d + \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_o \\ \dot{\mathcal{A}}_o \\ \dot{\mathcal{A}}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_d \\ \alpha^2 \dot{\mathcal{A}}_d \\ \alpha \dot{\mathcal{A}}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_i \\ \alpha \dot{\mathcal{A}}_i \\ \alpha^2 \dot{\mathcal{A}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_o + \dot{\mathcal{A}}_d + \dot{\mathcal{A}}_i \\ \dot{\mathcal{A}}_o + \alpha^2 \dot{\mathcal{A}}_d + \alpha \dot{\mathcal{A}}_i \\ \dot{\mathcal{A}}_o + \alpha \dot{\mathcal{A}}_d + \alpha^2 \dot{\mathcal{A}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_o \\ \dot{\mathcal{A}}_d \\ \dot{\mathcal{A}}_i \end{bmatrix}$$

O anche:

$$\|\dot{A}\| = \|S\| \cdot \|\dot{\mathcal{A}}\|$$

Dove $\|S\|$ è, ovviamente, la *matrice quadrata delle sequenze*.

Il teorema si dimostra immediatamente uguagliando fra loro gli elementi corrispondenti delle due matrici colonna:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = \dot{\mathcal{A}}_o + \dot{\mathcal{A}}_d + \dot{\mathcal{A}}_i \\ \dot{A}_2 = \dot{\mathcal{A}}_o + \alpha^2 \dot{\mathcal{A}}_d + \alpha \dot{\mathcal{A}}_i \\ \dot{A}_3 = \dot{\mathcal{A}}_o + \alpha \dot{\mathcal{A}}_d + \alpha^2 \dot{\mathcal{A}}_i \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare di tre equazioni che stabilisce un legame biunivoco tra la terna dei vettori $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3$ e la terna dei vettori base delle terne componenti $\dot{\mathcal{A}}_o, \dot{\mathcal{A}}_d, \dot{\mathcal{A}}_i$. Di conseguenza il sistema consente, dati $\dot{\mathcal{A}}_o, \dot{\mathcal{A}}_d$ e $\dot{\mathcal{A}}_i$, di ricavare $\dot{A}_1, \dot{A}_2$ e $\dot{A}_3$ e, viceversa, dati $\dot{A}_1, \dot{A}_2$ e $\dot{A}_3$ di dedurre i primi:

$$\|\dot{\mathcal{A}}\| = \|S\|^{-1} \cdot \|\dot{A}\|$$

dove $\|S\|^{-1}$ è la *matrice inversa delle sequenze*.

Infatti da

$$\|\dot{A}\| = \|S\| \cdot \|\dot{\mathcal{A}}\|$$

Premoltiplicando ambo i membri per $\|S\|^{-1}$ si ottiene:

$$\|S\|^{-1} \cdot \|\dot{A}\| = \|S\|^{-1} \cdot \|S\| \cdot \|\dot{\mathcal{A}}\| = \|\dot{\mathcal{A}}\|$$

Si ha pertanto:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{A}}_o = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3) \\ \dot{\mathcal{A}}_d = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha \dot{A}_2 + \alpha^2 \dot{A}_3) \\ \dot{\mathcal{A}}_i = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha^2 \dot{A}_2 + \alpha \dot{A}_3) \end{cases}$$

Infatti la relazione matriciale:

$$\|\mathcal{A}\| = \|S\|^{-1} \cdot \|\dot{A}\|$$

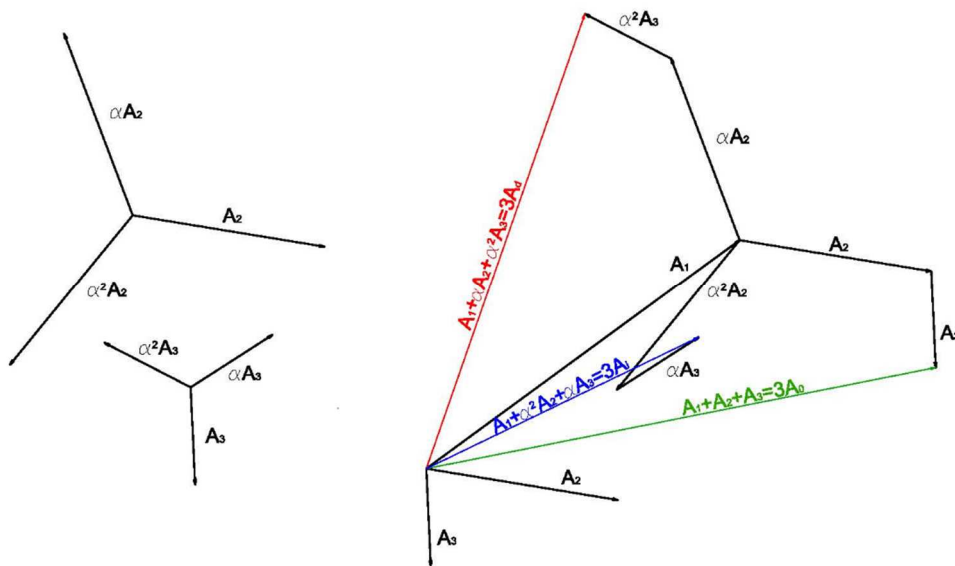
significa ovviamente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_o \\ \dot{\mathcal{A}}_d \\ \dot{\mathcal{A}}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3) \\ \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha\dot{A}_2 + \alpha^2\dot{A}_3) \\ \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha^2\dot{A}_2 + \alpha\dot{A}_3) \end{bmatrix}$$

Le precedenti relazioni stabiliscono dunque una corrispondenza biunivoca fra terne qualsiasi di vettori e sistemi di tre terne, rispettivamente di sequenza omopolare, diretta e inversa.

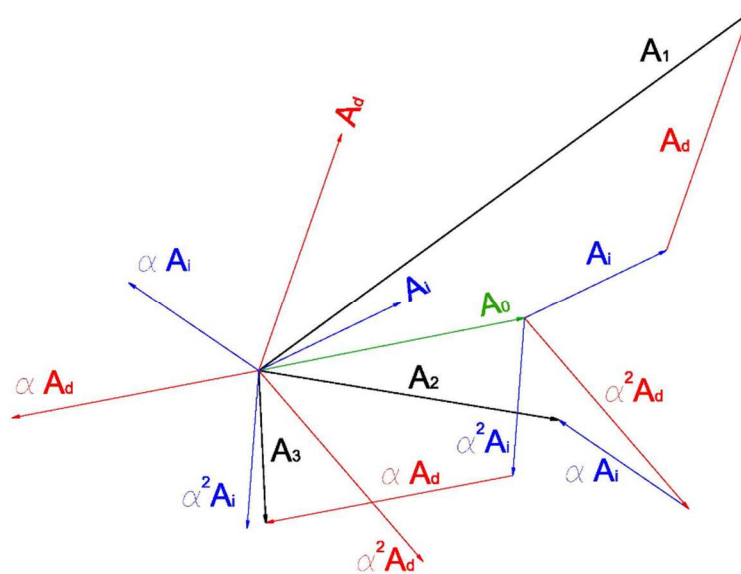
Ogni sistema di tre vettori è perciò compiutamente individuato e determinato dalle corrispondenti terne nelle quali esso è decomponibile, che vengono chiamate le sue **componenti simmetriche**. E poiché, come già visto, ciascuna componente simmetrica è individuata dal suo vettore base, la rappresentazione delle terne di vettori $(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3)$ mediante le loro componenti simmetriche, viene effettuata in base alle relazioni di corrispondenza:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \|S\| \cdot \|\mathcal{A}\| \\ \|\mathcal{A}\| &= \|S\|^{-1} \cdot \|A\| \end{aligned}$$



$$\|\mathcal{A}\| = \|S\|^{-1} \cdot \|\dot{A}\|$$

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{A}}_0 = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3) \\ \dot{\mathcal{A}}_d = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha \dot{A}_2 + \alpha^2 \dot{A}_3) \\ \dot{\mathcal{A}}_i = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha^2 \dot{A}_2 + \alpha \dot{A}_3) \end{cases}$$



$$\|A\| = \|S\| \cdot \|\mathcal{A}\|$$

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = \dot{\mathcal{A}}_0 + \dot{\mathcal{A}}_d + \dot{\mathcal{A}}_i \\ \dot{A}_2 = \dot{\mathcal{A}}_0 + \alpha^2 \dot{\mathcal{A}}_d + \alpha \dot{\mathcal{A}}_i \\ \dot{A}_3 = \dot{\mathcal{A}}_0 + \alpha \dot{\mathcal{A}}_d + \alpha^2 \dot{\mathcal{A}}_i \end{cases}$$

8.3.1 Proprietà delle componenti simmetriche

Se $\dot{\mathcal{A}}_o$, $\dot{\mathcal{A}}_d$ e $\dot{\mathcal{A}}_i$ sono i vettori base delle componenti simmetriche della terna $\dot{A}_1$, $\dot{A}_2$ e $\dot{A}_3$ e k è un numero reale o complesso, si ha ovviamente:

$$\|S\|^{-1} \cdot \|k\dot{A}\| = k\|S\|^{-1} \cdot \|\dot{A}\| = k\|\dot{\mathcal{A}}\| = \|k\dot{\mathcal{A}}\|$$

Cioè i vettori base delle componenti simmetriche della terna ottenuta moltiplicando per k una terna di vettori, sono uguali ai vettori base delle componenti simmetriche di questa, moltiplicati per k .

Se $(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3)$ e $(\dot{B}_1, \dot{B}_2, \dot{B}_3)$ sono due terne qualsiasi e $(\dot{\mathcal{A}}_o, \dot{\mathcal{A}}_d, \dot{\mathcal{A}}_i)$ e $(\dot{\mathcal{B}}_o, \dot{\mathcal{B}}_d, \dot{\mathcal{B}}_i)$ sono i vettori base delle rispettive componenti simmetriche, si ha:

$$\|S\|^{-1} \cdot \|\dot{A} + \dot{B}\| = \|S\|^{-1} \cdot \|\dot{A}\| + \|S\|^{-1} \cdot \|\dot{B}\| = \|\dot{\mathcal{A}}\| + \|\dot{\mathcal{B}}\| = \|\dot{\mathcal{A}} + \dot{\mathcal{B}}\|$$

Vale a dire che i vettori base delle componenti simmetriche della somma di due terne di vettori, sono uguali alla somma dei corrispondenti vettori base delle componenti simmetriche delle terne addendi.

Altra proprietà che si utilizza nella pratica del calcolo è quella relativa alle *terne coniugate*.

Consideriamo una terna di vettori $(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3)$ ed i vettori base $(\dot{\mathcal{A}}_o, \dot{\mathcal{A}}_d, \dot{\mathcal{A}}_i)$ delle loro componenti simmetriche. E' facile dimostrare che se con $\dot{\mathcal{A}}_{co}$, $\dot{\mathcal{A}}_{cd}$, $\dot{\mathcal{A}}_{ci}$ indichiamo i vettori base delle componenti simmetriche della terna dei vettori $(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3)$ coniugati dei primi, si ha:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{A}}_{co} = \dot{\mathcal{A}}_o \\ \dot{\mathcal{A}}_{cd} = \dot{\mathcal{A}}_i \\ \dot{\mathcal{A}}_{ci} = \dot{\mathcal{A}}_d \end{cases}$$

Infatti dati i vettori:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= A_1 e^{j\psi_1} \\ \dot{A}_2 &= A_2 e^{j\psi_2} \\ \dot{A}_3 &= A_3 e^{j\psi_3} \end{aligned}$$

Otteniamo le componenti simmetriche dalla nota relazione:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{A}}_o \\ \dot{\mathcal{A}}_d \\ \dot{\mathcal{A}}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathcal{A}}_o = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3) = \frac{1}{3}(A_1 e^{j\psi_1} + A_2 e^{j\psi_2} + A_3 e^{j\psi_3})$$

$$\dot{\mathcal{A}}_d = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha \dot{A}_2 + \alpha^2 \dot{A}_3) = \frac{1}{3}(A_1 e^{j\psi_1} + A_2 e^{j\psi_2} e^{j\frac{2}{3}\pi} + A_3 e^{j\psi_3} e^{j\frac{4}{3}\pi}) = \frac{1}{3}[A_1 e^{j\psi_1} + A_2 e^{j(\psi_2 + \frac{2}{3}\pi)} + A_3 e^{j(\psi_3 + \frac{4}{3}\pi)}]$$

$$\dot{\mathcal{A}}_i = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha^2 \dot{A}_2 + \alpha \dot{A}_3) = \frac{1}{3}(A_1 e^{j\psi_1} + A_2 e^{j\psi_2} e^{j\frac{4}{3}\pi} + A_3 e^{j\psi_3} e^{j\frac{2}{3}\pi}) = \frac{1}{3}[A_1 e^{j\psi_1} + A_2 e^{j(\psi_2 + \frac{4}{3}\pi)} + A_3 e^{j(\psi_3 + \frac{2}{3}\pi)}]$$

Consideriamo ora i vettori coniugati:

$$\begin{aligned}\check{A}_1 &= A_1 e^{-j\psi_1} \\ \check{A}_2 &= A_2 e^{-j\psi_2} \\ \check{A}_3 &= A_3 e^{-j\psi_3}\end{aligned}$$

Ricaviamo le componenti simmetriche, sempre con la medesima relazione:

$$\begin{vmatrix} \dot{\mathcal{A}}_{co} \\ \dot{\mathcal{A}}_{cd} \\ \dot{\mathcal{A}}_{ci} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \check{A}_1 \\ \check{A}_2 \\ \check{A}_3 \end{vmatrix}$$

Si deduce che:

$$\dot{\mathcal{A}}_{co} = \frac{1}{3}(\check{A}_1 + \check{A}_2 + \check{A}_3) = \frac{1}{3}(A_1 e^{-j\psi_1} + A_2 e^{-j\psi_2} + A_3 e^{-j\psi_3})$$

e poiché

$$\dot{\mathcal{A}}_o = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3) = \frac{1}{3}(A_1 e^{j\psi_1} + A_2 e^{j\psi_2} + A_3 e^{j\psi_3})$$

si ottiene:

$$\dot{\mathcal{A}}_{co} = \check{\mathcal{A}}_o$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{A}}_{cd} &= \frac{1}{3}(\check{A}_1 + \alpha^2 \check{A}_2 + \alpha \check{A}_3) = \frac{1}{3}(A_1 e^{-j\psi_1} + A_2 e^{-j\psi_2} e^{j\frac{2}{3}\pi} + A_3 e^{-j\psi_3} e^{j\frac{4}{3}\pi}) \\ &= \frac{1}{3}[A_1 e^{-j\psi_1} + A_2 e^{-j(\psi_2 - \frac{2}{3}\pi)} + A_3 e^{-j(\psi_3 - \frac{4}{3}\pi)}] = \frac{1}{3}[A_1 e^{-j\psi_1} + A_2 e^{-j(\psi_2 + \frac{4}{3}\pi)} + A_3 e^{-j(\psi_3 + \frac{2}{3}\pi)}]\end{aligned}$$

e poiché

$$\dot{\mathcal{A}}_i = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha^2 \dot{A}_2 + \alpha \dot{A}_3) = \frac{1}{3}(A_1 e^{j\psi_1} + A_2 e^{j\psi_2} e^{j\frac{4}{3}\pi} + A_3 e^{j\psi_3} e^{j\frac{2}{3}\pi}) = \frac{1}{3}[A_1 e^{j\psi_1} + A_2 e^{j(\psi_2 + \frac{4}{3}\pi)} + A_3 e^{j(\psi_3 + \frac{2}{3}\pi)}]$$

si conclude che

$$\dot{\mathcal{A}}_{cd} = \check{\mathcal{A}}_i$$

Con analogo ragionamento si ha:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{A}}_{ci} &= \frac{1}{3}(\check{A}_1 + \alpha^2 \check{A}_2 + \alpha \check{A}_3) = \frac{1}{3}(A_1 e^{-j\psi_1} + A_2 e^{-j\psi_2} e^{j\frac{4}{3}\pi} + A_3 e^{-j\psi_3} e^{j\frac{2}{3}\pi}) \\ &= \frac{1}{3}[A_1 e^{-j\psi_1} + A_2 e^{-j(\psi_2 - \frac{4}{3}\pi)} + A_3 e^{-j(\psi_3 - \frac{2}{3}\pi)}] = \frac{1}{3}[A_1 e^{-j\psi_1} + A_2 e^{-j(\psi_2 + \frac{2}{3}\pi)} + A_3 e^{-j(\psi_3 + \frac{4}{3}\pi)}]\end{aligned}$$

poiché

$$\dot{\mathcal{A}}_d = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha \dot{A}_2 + \alpha^2 \dot{A}_3) = \frac{1}{3}(A_1 e^{j\psi_1} + A_2 e^{j\psi_2} e^{j\frac{2}{3}\pi} + A_3 e^{j\psi_3} e^{j\frac{4}{3}\pi}) = \frac{1}{3}[A_1 e^{j\psi_1} + A_2 e^{j(\psi_2 + \frac{2}{3}\pi)} + A_3 e^{j(\psi_3 + \frac{4}{3}\pi)}]$$

si conclude che

$$\dot{\mathcal{A}}_{ci} = \check{\mathcal{A}}_d$$

Riassumendo, si ha quindi che:

$$\|S\|^{-1} \cdot \|\vec{A}\| = \begin{vmatrix} \check{\mathcal{A}}_o \\ \check{\mathcal{A}}_i \\ \check{\mathcal{A}}_d \end{vmatrix}$$

Vale a dire, *le componenti simmetriche della terna coniugata di una terna di vettori sono uguali ai coniugati delle componenti simmetriche della terna data, però con uguaglianze incrociate fra le componenti dirette e quelle inverse.*

Se la terna dei vettori considerata, costituisce un *sistema puro* ($\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 = 0$), la sua *componente simmetrica di sequenza omopolare* è necessariamente uguale a zero:

$$\check{\mathcal{A}}_o = \frac{1}{3}(\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3) = 0$$

E viceversa; vale a dire, la *condizione necessaria e sufficiente affinché una terna di vettori sia pura* è che la sua *componente omopolare* sia nulla.

In tal caso, chiaramente, il centro stella della terna dei vettori considerati coincide con il baricentro del triangolo che ha per vertici gli estremi dei vettori stessi (figura 57).

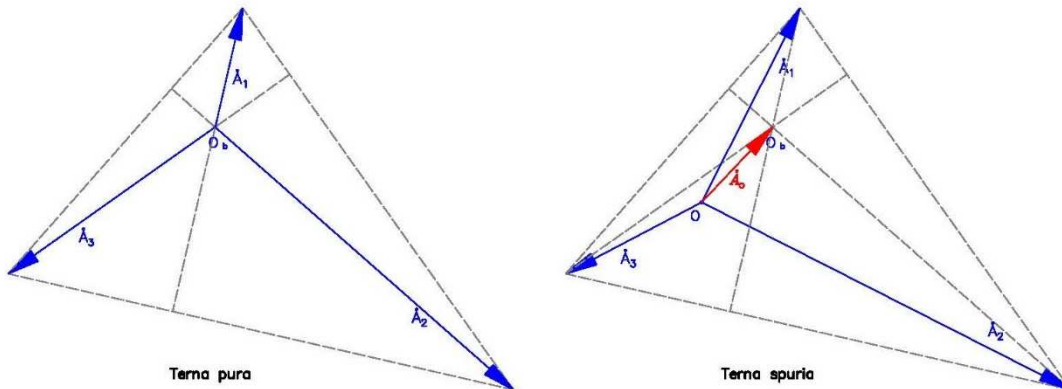


Figura 57

In generale, invece, quando la terna è *spuria* il vettore base della sua componente omopolare, essendo uguale alla media aritmetica dei tre vettori (cfr. formula pag. 24), è rappresentato dal *segmento che unisce il centro stella della terna con il baricentro del triangolo che ha per vertici gli estremi dei vettori stessi.*

La presenza della componente omopolare è dunque l'elemento indicativo della impurezza della terna stessa, si assume di conseguenza, come **grado di impurezza** (ρ_i) di una terna di vettori il rapporto fra le ampiezze dei vettori base della componente omopolare e della componente diretta.

$$\rho_i = \frac{\mathcal{A}_o}{\mathcal{A}_d}$$

Prendiamo ora in esame terne di grandezze sinusoidali rappresentate da *stelle di vettori a vertici comuni*, le quali hanno gli estremi dei vettori corrispondenti che coincidono in tre punti 1, 2, e 3 comuni a tutte le terne (figura 58).

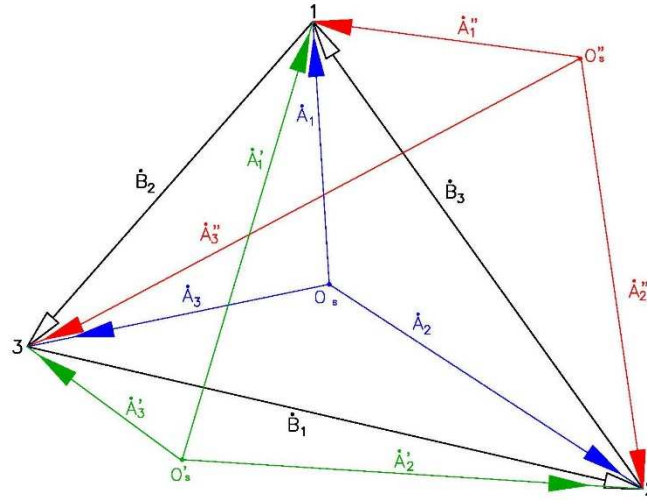


Figura 58

Indichiamo con $\dot{B}_1$, $\dot{B}_2$ e $\dot{B}_3$ i vettori concatenati, rappresentati dai lati del triangolo formato dai vertici comuni a tutte le terne, attribuendo per indice, ad ognuno di essi, il numero corrispondente al vertice opposto.

$$\begin{cases} \dot{B}_1 = \dot{A}_2 - \dot{A}_3 = \dot{A}'_2 - \dot{A}'_3 = \dots \\ \dot{B}_2 = \dot{A}_3 - \dot{A}_1 = \dot{A}'_3 - \dot{A}'_1 = \dots \\ \dot{B}_3 = \dot{A}_1 - \dot{A}_2 = \dot{A}'_1 - \dot{A}'_2 = \dots \end{cases}$$

Indichiamo ora con $\dot{\mathcal{A}}_o$, $\dot{\mathcal{A}}_d$, e $\dot{\mathcal{A}}_i$, i vettori base delle componenti simmetriche della terna generica $(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3)$ avente i vertici nei punti 1, 2 e 3 e con $\dot{\mathcal{B}}_o$, $\dot{\mathcal{B}}_d$, e $\dot{\mathcal{B}}_i$ i vettori base delle componenti simmetriche della terna dei vettori concatenati $\dot{B}_1, \dot{B}_2$ e $\dot{B}_3$:

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathcal{A}}\| &= \|S\|^{-1} \cdot \|\dot{A}\| \\ \|\dot{\mathcal{B}}\| &= \|S\|^{-1} \cdot \|\dot{B}\| \end{aligned}$$

Si rileva facilmente che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{B}}_o = 0 \\ \dot{\mathcal{B}}_d = -j\sqrt{3} \dot{\mathcal{A}}_d \\ \dot{\mathcal{B}}_i = j\sqrt{3} \dot{\mathcal{A}}_i \end{cases}$$

e, quindi, reciprocamente:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{A}}_d = \frac{j}{\sqrt{3}} \dot{\mathcal{B}}_d \\ \dot{\mathcal{A}}_i = -\frac{j}{\sqrt{3}} \dot{\mathcal{B}}_i \end{cases}$$

Infatti abbiamo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{B}}_o &= \frac{1}{3}(\dot{B}_1 + \dot{B}_2 + \dot{B}_3) = 0 \\ \dot{\mathcal{B}}_d &= \frac{1}{3}(\dot{B}_1 + \alpha\dot{B}_2 + \alpha^2\dot{B}_3) = \frac{1}{3}[(\dot{A}_2 - \dot{A}_3) + \alpha(\dot{A}_3 - \dot{A}_1) + \alpha^2(\dot{A}_1 - \dot{A}_2)] = \\ &= \frac{1}{3}[\dot{A}_1(\alpha^2 - \alpha) + \alpha\dot{A}_2(\alpha^2 - \alpha) + \alpha^2\dot{A}_3(\alpha^2 - \alpha)] = \\ &= \frac{1}{3}(\alpha^2 - \alpha)[\dot{A}_1 + \alpha\dot{A}_2 + \alpha^2\dot{A}_3] = (\alpha^2 - \alpha)\dot{\mathcal{A}}_d = -j\sqrt{3}\dot{\mathcal{A}}_d\end{aligned}$$

Infatti

$$(\alpha^2 - \alpha) = \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = -j\sqrt{3}$$

e con calcolo analogo:

$$\dot{\mathcal{B}}_i = j\sqrt{3}\dot{\mathcal{A}}_i$$

Osserviamo che poiché tali relazioni sono state ottenute per una stella generica, esse sono valide per tutte le stelle dei vettori aventi i vertici nei punti 1, 2 e 3. E poiché i vettori concatenati sono comuni a tutte, si conclude che *in ogni sistema di terne di vettori a vertici comuni, tutte quante le terne hanno le stesse componenti simmetriche diretta ed inversa e, perciò, si differenziano solo per la componente omopolare (segmento che unisce il centro stella della terna con il baricentro del triangolo che ha per vertici gli estremi dei vettori stessi).*

Infatti, per quanto detto, la componente omopolare è determinata dalla posizione del centro stella di ciascuna stella.

Pertanto se di una terna di vettori si conosce solo la relativa terna concatenata (si conoscono cioè i vertici 1, 2 e 3 della stella dei vettori, ma non il centro stella O), risultano determinate le sue componenti simmetriche diretta ed inversa, ma rimane indeterminata la componente omopolare, salvo che per la terna baricentrica per la quale, chiaramente, la componente omopolare è nulla.

Se avessimo un sistema di due vettori $\dot{A}_1, \dot{A}_2$, è chiaro che questo possa essere sempre considerato come una terna ($\dot{A}_1, \dot{A}_2, 0$) di cui un vettore ha ampiezza nulla. Pertanto le componenti simmetriche del sistema dei due vettori $\dot{A}_1$ e $\dot{A}_2$ hanno per vettori base:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{A}}_o = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \dot{A}_2) \\ \dot{\mathcal{A}}_d = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha\dot{A}_2) \\ \dot{\mathcal{A}}_i = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha^2\dot{A}_2) \end{cases}$$

Nel caso particolare, di frequente applicazione, in cui i due vettori siano opposti (sistema monofase).

$$\dot{A}_2 = -\dot{A}_1$$

Le componenti simmetriche hanno allora per vettori base:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{A}}_o = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \dot{A}_2) = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 - \dot{A}_1) = 0 \\ \dot{\mathcal{A}}_d = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha\dot{A}_2) = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 - \alpha\dot{A}_1) = \dot{A}_1 \frac{1-\alpha}{3} = \frac{\dot{A}_1}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} \\ \dot{\mathcal{A}}_i = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \alpha^2\dot{A}_2) = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 - \alpha^2\dot{A}_1) = \dot{A}_1 \frac{1-\alpha^2}{3} = \frac{\dot{A}_1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}} \end{cases}$$

Infatti:

$$1 - \alpha = 1 + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1 - \alpha}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - j\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$1 - \alpha^2 = 1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1 - \alpha^2}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + j\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}}$$

Vale a dire, la componente omopolare è nulla ed i vettori base delle componenti diretta ed inversa sono rappresentati da due vettori di ampiezza uguale a $\frac{A_1}{\sqrt{3}}$ e ruotati di fase di $\frac{\pi}{6}$, rispettivamente in ritardo ed in anticipo rispetto ad $\hat{A}_1$.

E' evidente che *una terna di vettori di senso ciclico diretto è simmetrica quando si identifica con la propria componente simmetrica di sequenza diretta*, cioè quando le sue componenti simmetriche omopolare ed inversa sono nulle ($\hat{A}_o = 0$, $\hat{A}_i = 0$). Di conseguenza una terna le cui componenti omopolare ed inversa sono diverse da zero è ovviamente dissimmetrica ed è logico reputare che essa si discosti tanto più dalle condizioni di simmetria, quanto maggiore è l'ampiezza dei vettori base, $\hat{A}_o$ e $\hat{A}_i$, di tali componenti.

Il grado di impurezza $\rho_i = \frac{\hat{A}_o}{\hat{A}_d}$, prima definito, rappresenta l'indice quantitativo della dissimmetria di cui risulta affetta la terna a causa della presenza di una componente omopolare non nulla. Ed è quindi chiaro che nei sistemi trifase nei quali è nulla la componente inversa, ρ_i indica la asimmetria globale del sistema. La dissimmetria prodotta invece nella terna dalla presenza di una componente inversa non nulla, si valuta quantitativamente mediante un indice definito dal *rapporto fra l'ampiezza del vettore base della componente inversa e quella del vettore base della componente diretta*, che si dice **grado di squilibrio** (ρ_s) della terna:

$$\rho_s = \frac{\mathcal{A}_i}{\mathcal{A}_d}$$

Nei *sistemi puri* nei quali come visto $\hat{A}_o = 0$ e $\rho_i = 0$ (ad esempio sistemi a tre conduttori), ρ_s indica ovviamente l'asimmetria globale del sistema.

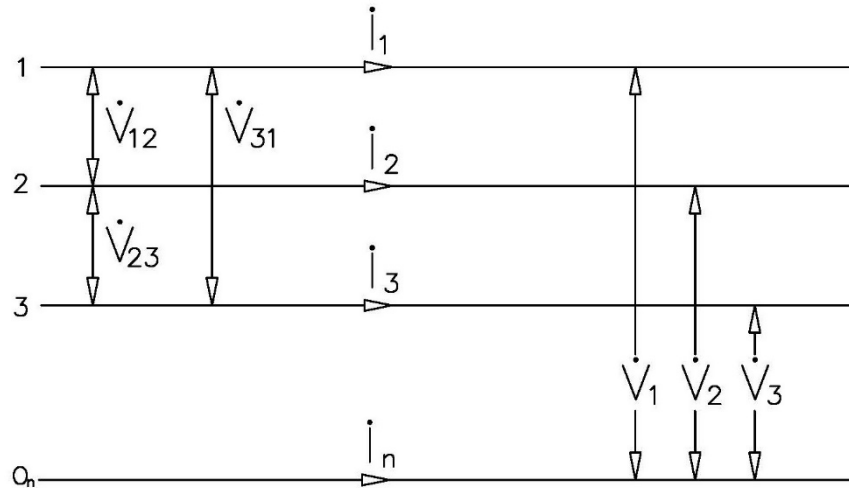
Pertanto, nei *sistemi puri*:

$\rho_s = \mathcal{A}_i / \mathcal{A}_d$	$\mathcal{A}_i$	$\mathcal{A}_d$	
0	0	$\neq 0$	Terna simmetrica
∞	$\neq 0$	0	Terna simmetrica senso ciclico inverso
1	$= \mathcal{A}_d$	$= \mathcal{A}_i$	I vettori della terna hanno tutti uguale direzione (ma non uguale verso) e corrispondono, nel loro complesso, ad un sistema monofase

8.4 Analisi dei sistemi trifase mediante le componenti simmetriche

Ci riferiamo al caso più generale e precisamente ai sistemi trifase dissimmetrici e squilibrati a quattro conduttori; l'analisi di tutti gli altri casi può dedursi, evidentemente, da questo caso più generale.

Indichiamo con $\dot{V}_1$, $\dot{V}_2$ e $\dot{V}_3$ le tensioni dei conduttori rispetto al neutro; con $\dot{V}_{12}$, $\dot{V}_{23}$ e $\dot{V}_{31}$ le tensioni di linea; con $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ e $\dot{I}_3$ le correnti di linea ed indichiamo con $\|\dot{\mathcal{V}}\|$, $\|\dot{\mathcal{V}}_l\|$ ed $\|\dot{\mathcal{I}}\|$ le matrici colonna dei vettori base delle rispettive componenti simmetriche (figura 59).



Terne delle grandezze		
Tensioni di linea	Correnti di linea	Tensioni di fase o stellate
$\ \dot{\mathcal{V}}_l\ = \begin{bmatrix} \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{23} \\ \dot{V}_{31} \end{bmatrix}$	$\ \dot{\mathcal{I}}\ = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}$	$\ \dot{\mathcal{V}}\ = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix}$
Componenti simmetriche		
$\ \dot{\mathcal{V}}_l\ = \ S\ ^{-1} \cdot \ \dot{\mathcal{V}}_l\ = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{V}}_{lo} \\ \dot{\mathcal{V}}_{ld} \\ \dot{\mathcal{V}}_{li} \end{bmatrix}$	$\ \dot{\mathcal{I}}\ = \ S\ ^{-1} \cdot \ \dot{\mathcal{I}}\ = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{I}}_o \\ \dot{\mathcal{I}}_d \\ \dot{\mathcal{I}}_i \end{bmatrix}$	$\ \dot{\mathcal{V}}\ = \ S\ ^{-1} \cdot \ \dot{\mathcal{V}}\ = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{V}}_o \\ \dot{\mathcal{V}}_d \\ \dot{\mathcal{V}}_i \end{bmatrix}$

Figura 59

Nel particolare caso di *sistemi simmetrici ed equilibrati*, è ovvio che le componenti omopolare ed inversa di tutte le terne di grandezze sono identicamente nulle e che, quindi, ogni terna si identifica con la propria componente simmetrica di sequenza diretta.

Pertanto nei sistemi simmetrici ed equilibrati si ha:

$$\|\dot{\mathcal{V}}_l\| = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{V}_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \|\dot{\mathcal{I}}\| = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{I}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \|\dot{\mathcal{V}}\| = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{V}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nel caso più generale, dei *sistemi dissimmetrici e squilibrati a quattro conduttori*, salvo la componente omopolare delle tensioni di linea (terna sempre pura), che è sempre identicamente nulla ($\dot{\mathcal{V}}_{lo} = 0$), tutte le terne di grandezze sono rappresentate dalle componenti simmetriche di tutte e tre le sequenze:

$$\|\dot{\mathcal{V}}_l\| = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\mathcal{V}}_{ld} \\ \dot{\mathcal{V}}_{li} \end{bmatrix} \quad \|\dot{\mathcal{J}}\| = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{J}}_o \\ \dot{\mathcal{J}}_d \\ \dot{\mathcal{J}}_i \end{bmatrix} \quad \|\dot{\mathcal{V}}\| = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{V}}_o \\ \dot{\mathcal{V}}_d \\ \dot{\mathcal{V}}_i \end{bmatrix}$$

8.4.1 Relazione fra le componenti simmetriche

Per determinare adesso le relazioni fra le componenti simmetriche delle tensioni di un sistema trifase qualsiasi e le componenti simmetriche delle correnti, riprendiamo in esame il sistema dissimmetrico e squilibrato a quattro conduttori con accoppiamento induttivo fra le fasi (figura 60)

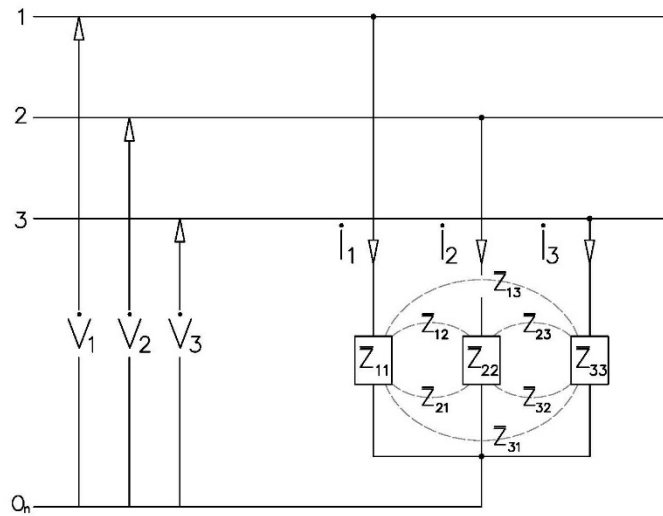


Figura 60

Nella relazione generale:

$$\|\dot{\mathcal{V}}\| = \|\bar{Z}\| \cdot \|\dot{\mathcal{I}}\| \quad \text{dove} \quad \|\bar{Z}\| = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} & \bar{Z}_{13} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \bar{Z}_{23} \\ \bar{Z}_{31} & \bar{Z}_{32} & \bar{Z}_{33} \end{bmatrix}$$

che lega i valori delle tensioni ai valori delle correnti, sostituiamo alle matrici delle tensioni e delle correnti, le loro espressioni in funzione delle rispettive componenti simmetriche:

$$\|\mathcal{S}\| \cdot \|\dot{\mathcal{V}}\| = \|\bar{Z}\| \cdot \|\mathcal{S}\| \cdot \|\dot{\mathcal{J}}\|$$

Premoltiplichiamo i due membri dell'uguaglianza ottenuta, per la matrice inversa delle sequenze:

$$\|\mathcal{S}\|^{-1} \cdot \|\mathcal{S}\| \cdot \|\dot{\mathcal{V}}\| = \|\mathcal{S}\|^{-1} \cdot \|\bar{Z}\| \cdot \|\mathcal{S}\| \cdot \|\dot{\mathcal{J}}\|$$

Ricordando allora che il prodotto di una matrice per la sua inversa è uguale alla matrice unità (il cui prodotto per una qualunque matrice dà, per risultato, la matrice stessa) e che, però, il prodotto fra matrici non gode della proprietà commutativa, si ottiene la relazione:

$$\|\dot{\mathcal{V}}\| = \|\mathcal{S}\|^{-1} \cdot \|\bar{Z}\| \cdot \|\mathcal{S}\| \cdot \|\dot{\mathcal{J}}\|$$

che rappresenta il legame tra le componenti simmetriche delle tensioni e quelle delle correnti.

8.4.2 Impedenze di sequenza

Effettuiamo ora il prodotto delle tre matrici $\|S\|^{-1} \cdot \|\bar{Z}\| \cdot \|S\|$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
 \|S\|^{-1} \cdot \|\bar{Z}\| \cdot \|S\| &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} & \bar{Z}_{13} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \bar{Z}_{23} \\ \bar{Z}_{31} & \bar{Z}_{32} & \bar{Z}_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} (\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_{21} + \bar{Z}_{31}) & (\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{22} + \bar{Z}_{32}) & (\bar{Z}_{13} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{33}) \\ (\bar{Z}_{11} + \alpha\bar{Z}_{21} + \alpha^2\bar{Z}_{31}) & (\bar{Z}_{12} + \alpha\bar{Z}_{22} + \alpha^2\bar{Z}_{32}) & (\bar{Z}_{13} + \alpha\bar{Z}_{23} + \alpha^2\bar{Z}_{33}) \\ (\bar{Z}_{11} + \alpha^2\bar{Z}_{21} + \alpha\bar{Z}_{31}) & (\bar{Z}_{12} + \alpha^2\bar{Z}_{22} + \alpha\bar{Z}_{32}) & (\bar{Z}_{13} + \alpha^2\bar{Z}_{23} + \alpha\bar{Z}_{33}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} [(\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_{22} + \bar{Z}_{33}) + (\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}) + (\bar{Z}_{21} + \bar{Z}_{32} + \bar{Z}_{13})] \\ [(\bar{Z}_{11} + \alpha\bar{Z}_{22} + \alpha^2\bar{Z}_{33}) + (\bar{Z}_{12} + \alpha\bar{Z}_{23} + \alpha^2\bar{Z}_{31}) + (\alpha\bar{Z}_{21} + \alpha^2\bar{Z}_{32} + \bar{Z}_{13})] \\ [(\bar{Z}_{11} + \alpha^2\bar{Z}_{22} + \alpha\bar{Z}_{33}) + (\bar{Z}_{12} + \alpha^2\bar{Z}_{23} + \alpha\bar{Z}_{31}) + (\alpha^2\bar{Z}_{21} + \alpha\bar{Z}_{32} + \bar{Z}_{13})] \end{vmatrix} \\
 &\quad \begin{vmatrix} [(\bar{Z}_{11} + \alpha^2\bar{Z}_{22} + \alpha\bar{Z}_{33}) + (\alpha^2\bar{Z}_{12} + \alpha\bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}) + (\bar{Z}_{21} + \alpha^2\bar{Z}_{32} + \alpha\bar{Z}_{13})] \\ [(\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_{22} + \bar{Z}_{33}) + (\alpha^2\bar{Z}_{12} + \alpha^2\bar{Z}_{23} + \alpha^2\bar{Z}_{31}) + (\alpha\bar{Z}_{21} + \alpha\bar{Z}_{32} + \alpha\bar{Z}_{13})] \\ [(\bar{Z}_{11} + \alpha\bar{Z}_{22} + \alpha^2\bar{Z}_{33}) + (\alpha^2\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \alpha\bar{Z}_{31}) + (\alpha^2\bar{Z}_{21} + \bar{Z}_{32} + \alpha\bar{Z}_{13})] \end{vmatrix} \\
 &\quad \begin{vmatrix} [(\bar{Z}_{11} + \alpha\bar{Z}_{22} + \alpha^2\bar{Z}_{33}) + (\alpha\bar{Z}_{12} + \alpha^2\bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}) + (\bar{Z}_{21} + \alpha\bar{Z}_{32} + \alpha^2\bar{Z}_{13})] \\ [(\bar{Z}_{11} + \alpha^2\bar{Z}_{22} + \alpha\bar{Z}_{33}) + (\alpha\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \alpha^2\bar{Z}_{31}) + (\alpha\bar{Z}_{21} + \bar{Z}_{32} + \alpha^2\bar{Z}_{13})] \\ [(\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_{22} + \bar{Z}_{33}) + (\alpha\bar{Z}_{12} + \alpha\bar{Z}_{23} + \alpha\bar{Z}_{31}) + (\alpha^2\bar{Z}_{21} + \alpha^2\bar{Z}_{32} + \alpha^2\bar{Z}_{13})] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{Z}_{00} & \bar{Z}_{0d} & \bar{Z}_{0i} \\ \bar{Z}_{d0} & \bar{Z}_{dd} & \bar{Z}_{di} \\ \bar{Z}_{i0} & \bar{Z}_{id} & \bar{Z}_{ii} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Si ottiene quindi una matrice quadrata in cui i nove elementi si dicono **impedenze di sequenza** del sistema e la matrice:

$$\|\bar{Z}_s\| = \begin{vmatrix} \bar{Z}_{00} & \bar{Z}_{0d} & \bar{Z}_{0i} \\ \bar{Z}_{d0} & \bar{Z}_{dd} & \bar{Z}_{di} \\ \bar{Z}_{i0} & \bar{Z}_{id} & \bar{Z}_{ii} \end{vmatrix} = \|S\|^{-1} \cdot \|\bar{Z}\| \cdot \|S\|$$

si chiama **matrice delle impedenze di sequenza**.

Gli elementi della diagonale principale di tale matrice ($\bar{Z}_{00}, \bar{Z}_{dd}, \bar{Z}_{ii}$) sono denominati **autoimpedenze di sequenza**; gli altri ($\bar{Z}_{0d}, \bar{Z}_{d0}, \bar{Z}_{oi}, \bar{Z}_{io}, \bar{Z}_{di}, \bar{Z}_{id}$) sono detti **mutue impedenze di sequenza**.

Avremo quindi:

$$\begin{aligned}
 \bar{Z}_{00} &= \frac{1}{3} [(\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_{22} + \bar{Z}_{33}) + (\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}) + (\bar{Z}_{21} + \bar{Z}_{32} + \bar{Z}_{13})] \\
 \bar{Z}_{d0} &= \frac{1}{3} [(\bar{Z}_{11} + \alpha\bar{Z}_{22} + \alpha^2\bar{Z}_{33}) + (\bar{Z}_{12} + \alpha\bar{Z}_{23} + \alpha^2\bar{Z}_{31}) + (\alpha\bar{Z}_{21} + \alpha^2\bar{Z}_{32} + \bar{Z}_{13})] \\
 \bar{Z}_{i0} &= \frac{1}{3} [(\bar{Z}_{11} + \alpha^2\bar{Z}_{22} + \alpha\bar{Z}_{33}) + (\bar{Z}_{12} + \alpha^2\bar{Z}_{23} + \alpha\bar{Z}_{31}) + (\alpha^2\bar{Z}_{21} + \alpha\bar{Z}_{32} + \bar{Z}_{13})] \\
 \bar{Z}_{0d} &= \frac{1}{3} [(\bar{Z}_{11} + \alpha^2\bar{Z}_{22} + \alpha\bar{Z}_{33}) + (\alpha^2\bar{Z}_{12} + \alpha\bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}) + (\bar{Z}_{21} + \alpha^2\bar{Z}_{32} + \alpha\bar{Z}_{13})] \\
 \bar{Z}_{dd} &= \frac{1}{3} [(\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_{22} + \bar{Z}_{33}) + (\alpha^2\bar{Z}_{12} + \alpha^2\bar{Z}_{23} + \alpha^2\bar{Z}_{31}) + (\alpha\bar{Z}_{21} + \alpha\bar{Z}_{32} + \alpha\bar{Z}_{13})] \\
 \bar{Z}_{id} &= \frac{1}{3} [(\bar{Z}_{11} + \alpha\bar{Z}_{22} + \alpha^2\bar{Z}_{33}) + (\alpha^2\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \alpha\bar{Z}_{31}) + (\alpha^2\bar{Z}_{21} + \bar{Z}_{32} + \alpha\bar{Z}_{13})] \\
 \bar{Z}_{oi} &= \frac{1}{3} [(\bar{Z}_{11} + \alpha\bar{Z}_{22} + \alpha^2\bar{Z}_{33}) + (\alpha\bar{Z}_{12} + \alpha^2\bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}) + (\bar{Z}_{21} + \alpha\bar{Z}_{32} + \alpha^2\bar{Z}_{13})] \\
 \bar{Z}_{di} &= \frac{1}{3} [(\bar{Z}_{11} + \alpha^2\bar{Z}_{22} + \alpha\bar{Z}_{33}) + (\alpha\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \alpha^2\bar{Z}_{31}) + (\alpha\bar{Z}_{21} + \bar{Z}_{32} + \alpha^2\bar{Z}_{13})] \\
 \bar{Z}_{ii} &= \frac{1}{3} [(\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_{22} + \bar{Z}_{33}) + (\alpha\bar{Z}_{12} + \alpha\bar{Z}_{23} + \alpha\bar{Z}_{31}) + (\alpha^2\bar{Z}_{21} + \alpha^2\bar{Z}_{32} + \alpha^2\bar{Z}_{13})]
 \end{aligned}$$

Nel caso particolare dei carichi senza accoppiamento mutuo fra le fasi ($\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} = \bar{Z}_{13} = \bar{Z}_{31} = \bar{Z}_{23} = \bar{Z}_{32} = 0$), le tre autoimpedenze di sequenza risultano uguali tra di loro e le sei mutue impedenze di sequenza risultano uguali a tre a tre. Infatti, dalla matrice prima ricavata, si deduce che nel caso particolare dei carichi con fasi indipendenti la matrice delle impedenze di sequenza risulta:

$$\|\bar{Z}_s\| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} (\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_{22} + \bar{Z}_{33}) & (\bar{Z}_{11} + \alpha^2 \bar{Z}_{22} + \alpha \bar{Z}_{33}) & (\bar{Z}_{11} + \alpha \bar{Z}_{22} + \alpha^2 \bar{Z}_{33}) \\ (\bar{Z}_{11} + \alpha \bar{Z}_{22} + \alpha^2 \bar{Z}_{33}) & (\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_{22} + \bar{Z}_{33}) & (\bar{Z}_{11} + \alpha^2 \bar{Z}_{22} + \alpha \bar{Z}_{33}) \\ (\bar{Z}_{11} + \alpha^2 \bar{Z}_{22} + \alpha \bar{Z}_{33}) & (\bar{Z}_{11} + \alpha \bar{Z}_{22} + \alpha^2 \bar{Z}_{33}) & (\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_{22} + \bar{Z}_{33}) \end{vmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} \bar{Z}_{00} = \bar{Z}_{dd} = \bar{Z}_{ii} = \frac{1}{3}(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \\ \bar{Z}_{0i} = \bar{Z}_{do} = \bar{Z}_{id} = \frac{1}{3}(\bar{Z}_1 + \alpha \bar{Z}_2 + \alpha^2 \bar{Z}_3) \\ \bar{Z}_{0d} = \bar{Z}_{di} = \bar{Z}_{io} = \frac{1}{3}(\bar{Z}_1 + \alpha^2 \bar{Z}_2 + \alpha \bar{Z}_3) \end{cases}$$

dove si è posto $\bar{Z}_{11} = \bar{Z}_1$, $\bar{Z}_{22} = \bar{Z}_2$ e $\bar{Z}_{33} = \bar{Z}_3$.

Come può rilevarsi osservando le precedenti espressioni, i valori delle auto e mutue impedenze di sequenza corrispondono, nel caso particolare in esame, al risultato che si otterrebbe applicando le formule di scomposizione in componenti simmetriche, alla terna di numeri complessi, $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$, $\bar{Z}_3$, rappresentativi delle impedenze delle fasi del carico. Per tale motivo, i tre valori ai quali si riducono le impedenze di sequenza per i *carichi con le fasi indipendenti*, si dicono le **componenti simmetriche del carico**.

$$\begin{cases} \bar{z}_o^* = \frac{1}{3}(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \\ \bar{z}_d^* = \frac{1}{3}(\bar{Z}_1 + \alpha \bar{Z}_2 + \alpha^2 \bar{Z}_3) \\ \bar{z}_i^* = \frac{1}{3}(\bar{Z}_1 + \alpha^2 \bar{Z}_2 + \alpha \bar{Z}_3) \end{cases}$$

Nel caso infine dei *carichi con fasi indipendenti ed equilibrati* ($\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = \bar{Z}$) le precedenti componenti simmetriche diretta ed inversa sono nulle; quindi le nove impedenze di sequenza si riducono alla sola componente omopolare

$$\bar{z}_o^* = \bar{Z}$$

8.4.3 Legge di Ohm mediante le componenti di sequenza

In virtù di quanto detto, la legge di Ohm relativa ad un sistema trifase qualsiasi, può esprimersi, in funzione delle componenti simmetriche, nella forma:

$$\|\dot{\mathcal{V}}\| = \|\bar{\mathcal{Z}}_s\| \cdot \|\dot{j}\|$$

Che corrisponde al sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{V}}_o = \bar{\mathcal{Z}}_{00}\dot{j}_o + \bar{\mathcal{Z}}_{0d}\dot{j}_d + \bar{\mathcal{Z}}_{0i}\dot{j}_i \\ \dot{\mathcal{V}}_d = \bar{\mathcal{Z}}_{d0}\dot{j}_o + \bar{\mathcal{Z}}_{dd}\dot{j}_d + \bar{\mathcal{Z}}_{di}\dot{j}_i \\ \dot{\mathcal{V}}_i = \bar{\mathcal{Z}}_{i0}\dot{j}_o + \bar{\mathcal{Z}}_{id}\dot{j}_d + \bar{\mathcal{Z}}_{ii}\dot{j}_i \end{cases}$$

Come è facile rilevare dalle equazioni precedenti, i nove valori delle auto e mutue impedenze, che costituiscono gli elementi della matrice, possono essere determinati sperimentalmente con semplici misure, inviando successivamente nel sistema una terna diretta di correnti $\dot{j}_d^*$, poi una terna inversa $\dot{j}_i^*$, infine una terna omopolare $\dot{j}_o^*$ e misurando ogni volta le tensioni.

Indicando con

- a) $\dot{\mathcal{V}}_{oo}^*$, $\dot{\mathcal{V}}_{do}^*$ e $\dot{\mathcal{V}}_{io}^*$ le componenti simmetriche delle tensioni misurate quando il sistema è percorso dalla sola terna di correnti di sequenza omopolare $\dot{j}_o^*$;
- b) $\dot{\mathcal{V}}_{od}^*$, $\dot{\mathcal{V}}_{dd}^*$ e $\dot{\mathcal{V}}_{id}^*$ le componenti simmetriche delle tensioni misurate quando il sistema è percorso dalla sola terna di correnti di sequenza omopolare $\dot{j}_d^*$;
- c) $\dot{\mathcal{V}}_{oi}^*$, $\dot{\mathcal{V}}_{di}^*$ e $\dot{\mathcal{V}}_{ii}^*$ le componenti simmetriche delle tensioni misurate quando il sistema è percorso dalla sola terna di correnti di sequenza omopolare $\dot{j}_i^*$

dal sistema scritto prima:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_o &= \bar{\mathcal{Z}}_{00}\dot{j}_o^* + \bar{\mathcal{Z}}_{0d}\dot{j}_d^* + \bar{\mathcal{Z}}_{0i}\dot{j}_i^* \\ \dot{\mathcal{V}}_d &= \bar{\mathcal{Z}}_{d0}\dot{j}_o^* + \bar{\mathcal{Z}}_{dd}\dot{j}_d^* + \bar{\mathcal{Z}}_{di}\dot{j}_i^* \\ \dot{\mathcal{V}}_i &= \bar{\mathcal{Z}}_{i0}\dot{j}_o^* + \bar{\mathcal{Z}}_{id}\dot{j}_d^* + \bar{\mathcal{Z}}_{ii}\dot{j}_i^* \end{aligned}$$

abbiamo che le nove impedenze di sequenza del sistema sono:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_{oo}^* &= \bar{\mathcal{Z}}_{00}\dot{j}_o^* \\ \dot{\mathcal{V}}_{do}^* &= \bar{\mathcal{Z}}_{d0}\dot{j}_o^* \\ \dot{\mathcal{V}}_{io}^* &= \bar{\mathcal{Z}}_{i0}\dot{j}_o^* \end{aligned} \quad \text{da cui} \quad \begin{aligned} \bar{\mathcal{Z}}_{00} &= \frac{\dot{\mathcal{V}}_{oo}^*}{\dot{j}_o^*} \\ \bar{\mathcal{Z}}_{d0} &= \frac{\dot{\mathcal{V}}_{do}^*}{\dot{j}_o^*} \\ \bar{\mathcal{Z}}_{i0} &= \frac{\dot{\mathcal{V}}_{io}^*}{\dot{j}_o^*} \end{aligned} \\ \\ \text{b) } \begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_{od}^* &= \bar{\mathcal{Z}}_{0d}\dot{j}_d^* \\ \dot{\mathcal{V}}_{dd}^* &= \bar{\mathcal{Z}}_{dd}\dot{j}_d^* \\ \dot{\mathcal{V}}_{id}^* &= \bar{\mathcal{Z}}_{di}\dot{j}_d^* \end{aligned} \quad \text{da cui} \quad \begin{aligned} \bar{\mathcal{Z}}_{0d} &= \frac{\dot{\mathcal{V}}_{od}^*}{\dot{j}_d^*} \\ \bar{\mathcal{Z}}_{dd} &= \frac{\dot{\mathcal{V}}_{dd}^*}{\dot{j}_d^*} \\ \bar{\mathcal{Z}}_{di} &= \frac{\dot{\mathcal{V}}_{id}^*}{\dot{j}_d^*} \end{aligned} \\ \\ \text{c) } \begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_{oi}^* &= \bar{\mathcal{Z}}_{0i}\dot{j}_i^* \\ \dot{\mathcal{V}}_{di}^* &= \bar{\mathcal{Z}}_{id}\dot{j}_i^* \\ \dot{\mathcal{V}}_{ii}^* &= \bar{\mathcal{Z}}_{ii}\dot{j}_i^* \end{aligned} \quad \text{da cui} \quad \begin{aligned} \bar{\mathcal{Z}}_{0i} &= \frac{\dot{\mathcal{V}}_{oi}^*}{\dot{j}_i^*} \\ \bar{\mathcal{Z}}_{id} &= \frac{\dot{\mathcal{V}}_{di}^*}{\dot{j}_i^*} \\ \bar{\mathcal{Z}}_{ii} &= \frac{\dot{\mathcal{V}}_{ii}^*}{\dot{j}_i^*} \end{aligned} \end{aligned}$$

Il sistema già scritto in precedenza:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{V}}_o = \bar{Z}_{00}\dot{J}_o + \bar{Z}_{0d}\dot{J}_d + \bar{Z}_{0i}\dot{J}_i \\ \dot{\mathcal{V}}_d = \bar{Z}_{d0}\dot{J}_o + \bar{Z}_{dd}\dot{J}_d + \bar{Z}_{di}\dot{J}_i \\ \dot{\mathcal{V}}_i = \bar{Z}_{i0}\dot{J}_o + \bar{Z}_{id}\dot{J}_d + \bar{Z}_{ii}\dot{J}_i \end{cases}$$

Evidenza che, *ciascuna componente simmetrica delle tensioni è determinata contemporaneamente da tutte e tre le componenti simmetriche delle correnti.*

Nel caso particolare di *carichi con fasi indipendenti*, ricordando sia:

$$\begin{cases} \bar{Z}_{00} = \bar{Z}_{dd} = \bar{Z}_{ii} = \frac{1}{3}(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \\ \bar{Z}_{0i} = \bar{Z}_{do} = \bar{Z}_{id} = \frac{1}{3}(\bar{Z}_1 + \alpha\bar{Z}_2 + \alpha^2\bar{Z}_3) \\ \bar{Z}_{0d} = \bar{Z}_{di} = \bar{Z}_{io} = \frac{1}{3}(\bar{Z}_1 + \alpha^2\bar{Z}_2 + \alpha\bar{Z}_3) \end{cases}$$

sia

$$\begin{aligned} \bar{z}_o^* &= \frac{1}{3}(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \\ \bar{z}_d^* &= \frac{1}{3}(\bar{Z}_1 + \alpha\bar{Z}_2 + \alpha^2\bar{Z}_3) \\ \bar{z}_i^* &= \frac{1}{3}(\bar{Z}_1 + \alpha^2\bar{Z}_2 + \alpha\bar{Z}_3) \end{aligned}$$

le precedenti equazioni, espresse in funzione delle componenti simmetriche del carico, divengono:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{V}}_o = \bar{Z}_{00}\dot{J}_o + \bar{Z}_{0d}\dot{J}_d + \bar{Z}_{0i}\dot{J}_i = \bar{z}_o^*\dot{J}_o + \bar{z}_i^*\dot{J}_d + \bar{z}_d^*\dot{J}_i \\ \dot{\mathcal{V}}_d = \bar{Z}_{d0}\dot{J}_o + \bar{Z}_{dd}\dot{J}_d + \bar{Z}_{di}\dot{J}_i = \bar{z}_d^*\dot{J}_o + \bar{z}_o^*\dot{J}_d + \bar{z}_i^*\dot{J}_i \\ \dot{\mathcal{V}}_i = \bar{Z}_{i0}\dot{J}_o + \bar{Z}_{id}\dot{J}_d + \bar{Z}_{ii}\dot{J}_i = \bar{z}_i^*\dot{J}_o + \bar{z}_d^*\dot{J}_d + \bar{z}_o^*\dot{J}_i \end{cases}$$

Infine, per i *carichi con fasi indipendenti ed equilibrati*, indicando con $\bar{Z}$ il valore comune delle impedenze delle fasi, la legge di Ohm assume la forma:

$$\|\dot{\mathcal{V}}\| = \bar{Z} \cdot \|\dot{J}\|$$

Perciò se sono alimentati da una terna dissimmetrica di tensioni, si ha:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{V}}_o = \bar{Z}\dot{J}_o \\ \dot{\mathcal{V}}_d = \bar{Z}\dot{J}_d \\ \dot{\mathcal{V}}_i = \bar{Z}\dot{J}_i \end{cases}$$

Vale a dire nei *carichi equilibrati* ogni componente simmetrica della terna delle tensioni è determinata solo dalla corrispondente componente simmetrica della terna delle correnti.

8.4.4 Principi di Kirchhoff mediante le componenti di sequenza

Anche i principi di Kirchhoff, applicati ai sistemi trifase, possono essere espressi mediante semplici relazioni, in funzione delle componenti simmetriche delle terne di grandezze.

Riprendiamo le relazioni:

$$\sum_k \|i^{(k)}\| = 0$$

$$\sum_k (\|\dot{v}^{(k)}\| - \|\bar{z}^{(k)}\| \|i^{(k)}\|) = 0$$

Dalla prima, ricordando che $\|i^{(k)}\| = \|S\| \cdot \|j^{(k)}\|$, si ha:

$$\sum_k \|S\| \cdot \|j^{(k)}\| = 0$$

da cui

$$\sum_k \|j^{(k)}\| = 0$$

Dalla seconda ricordando che $\|\dot{v}^{(k)}\| = \|S\| \cdot \|\dot{v}^{(k)}\|$ e che $\|\bar{z}_s\| = \|S\|^{-1} \cdot \|\bar{z}^{(k)}\| \cdot \|S\|$ otteniamo:

$$\sum_k (\|S\| \cdot \|\dot{v}^{(k)}\| - \|\bar{z}^{(k)}\| \cdot \|S\| \cdot \|j^{(k)}\|) = 0$$

$$\sum_k \|S\| (\|\dot{v}^{(k)}\| - \|S\|^{-1} \cdot \|\bar{z}^{(k)}\| \cdot \|S\| \cdot \|j^{(k)}\|) = 0$$

$$\sum_k \|S\| (\|\dot{v}^{(k)}\| - \|\bar{z}_s\| \cdot \|j^{(k)}\|) = 0$$

da cui:

$$\sum_k (\|\dot{v}^{(k)}\| - \|\bar{z}_s\| \cdot \|j^{(k)}\|) = 0$$

In definitiva abbiamo ottenuto:

$$\sum_k \|j^{(k)}\| = 0$$

$$\sum_k (\|\dot{v}^{(k)}\| - \|\bar{z}_s\| \cdot \|j^{(k)}\|) = 0$$

8.4.5 Circuito equivalente di sequenza

Confrontando ora le relazioni che legano le tensioni alle correnti di un sistema trifase qualsiasi con quelle che intercorrono fra le rispettive componenti simmetriche

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 + \bar{Z}_{13}\dot{I}_3 \\ \dot{V}_2 = \bar{Z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2 + \bar{Z}_{23}\dot{I}_3 \\ \dot{V}_3 = \bar{Z}_{31}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{32}\dot{I}_2 + \bar{Z}_{33}\dot{I}_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{V}_o = \bar{Z}_{00}\dot{J}_o + \bar{Z}_{0d}\dot{J}_d + \bar{Z}_{0i}\dot{J}_i \\ \dot{V}_d = \bar{Z}_{d0}\dot{J}_o + \bar{Z}_{dd}\dot{J}_d + \bar{Z}_{di}\dot{J}_i \\ \dot{V}_i = \bar{Z}_{i0}\dot{J}_o + \bar{Z}_{id}\dot{J}_d + \bar{Z}_{ii}\dot{J}_i \end{cases}$$

Si rileva che hanno una forma perfettamente analoga e le seconde possono essere dedotte dalle prime, sostituendo alle terne delle tensioni e delle correnti, le terne dei vettori base delle rispettive componenti simmetriche ed alle auto e mutue impedenze, rispettivamente, le auto e mutue impedenze di sequenza.

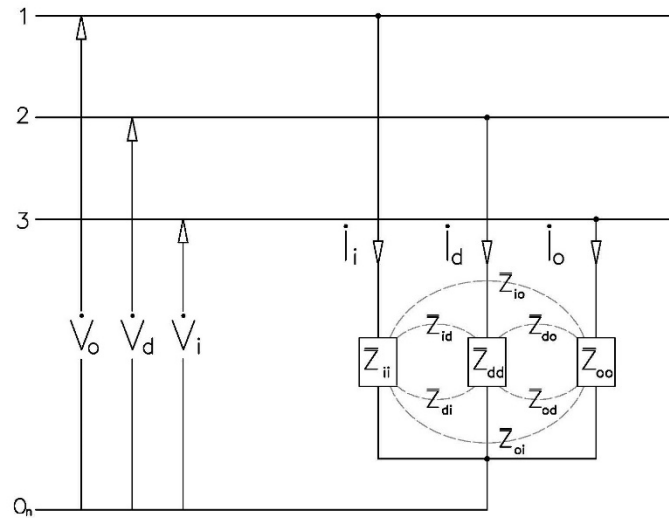


Figura 61

Tale analogia formale consente, ai fini del calcolo, di poter sostituire al circuito reale un circuito ideale equivalente, come quello di figura 61, che si chiama *circuito equivalente di sequenza*.

8.4.6 Sistemi fisicamente simmetrici

Si dicono *sistemi fisicamente simmetrici*, i sistemi trifase nei quali:

- le autoimpedenze sono uguali tra loro $\bar{Z}_{11} = \bar{Z}_{22} = \bar{Z}_{33} = \bar{Z}$;
- le mutue impedenze ascendenti sono uguali tra loro $\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{23} = \bar{Z}_{31} = \bar{Z}_{\mu a}$;
- le mutue impedenze discendenti sono uguali tra loro $\bar{Z}_{21} = \bar{Z}_{32} = \bar{Z}_{13} = \bar{Z}_{\mu d}$

Effettuando il calcolo delle impedenze di sequenza (cfr. pag. 51) si rileva che *nei sistemi fisicamente simmetrici tutte le mutue impedenze di sequenza sono nulle e le autoimpedenze di sequenza sono:*

$$\begin{cases} \bar{Z}_{00} = \bar{Z} + \bar{Z}_{\mu a} + \bar{Z}_{\mu d} = \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_{dd} = \bar{Z} + \alpha^2 \bar{Z}_{\mu a} + \alpha \bar{Z}_{\mu d} = \bar{Z}_d \\ \bar{Z}_{ii} = \bar{Z} + \alpha \bar{Z}_{\mu a} + \alpha^2 \bar{Z}_{\mu d} = \bar{Z}_i \end{cases}$$

Di conseguenza la matrice delle impedenze di sequenza diventa una matrice diagonale:

$$\|\bar{Z}_s\| = \begin{vmatrix} \bar{Z}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_d & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z}_i \end{vmatrix}$$

E le relazioni fra le componenti simmetriche delle tensioni e delle correnti assumono la forma:

$$\begin{cases} \dot{V}_0 = \bar{Z}_0 \dot{I}_0 \\ \dot{V}_d = \bar{Z}_d \dot{I}_d \\ \dot{V}_i = \bar{Z}_i \dot{I}_i \end{cases}$$

Queste relazioni evidenziano che, diversamente da quanto visto per i sistemi dissimmetrici, *nei sistemi fisicamente simmetrici, ciascuna componente simmetrica della terna delle tensioni è determinata solo dalla corrispondente componente simmetrica della terna delle correnti e viceversa.*

E' chiaro quindi che nel caso di sistemi fisicamente simmetrici, in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, il circuito equivalente di sequenza può essere suddiviso in tre circuiti monofase equivalenti, in ciascuno dei quali ogni componente simmetrica di tensione agisce sulla corrispondente autoimpedenza di sequenza, generando la omonima componente simmetrica di corrente (figura 62).

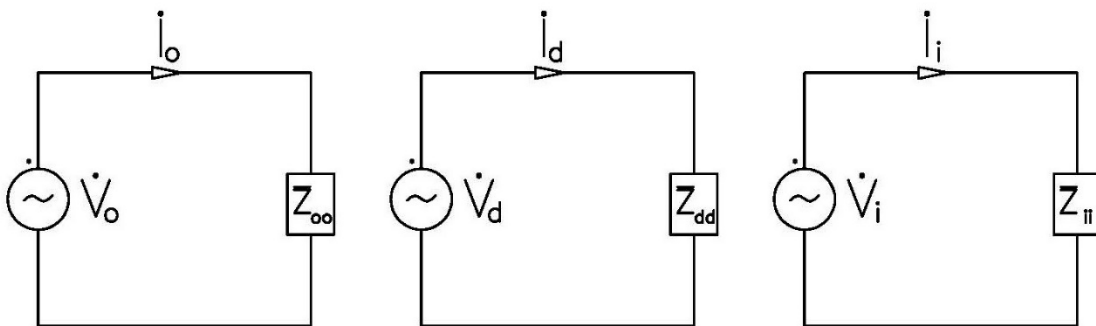


Figura 62

Questi circuiti si dicono *circuiti monofase equivalenti di sequenza*.

8.4.7 Potenze trifase mediante le componenti di sequenza

Dall'espressione della potenza complessa:

$$|\bar{S}| = \|\bar{V}\| \cdot \|\bar{I}\| = |\dot{V}_1 \cdot \check{I}_1 + \dot{V}_2 \cdot \check{I}_2 + \dot{V}_3 \cdot \check{I}_3|$$

Ricordando inoltre che:

$$\|\bar{S}\|^{-1} \cdot \|\bar{A}\| = \begin{vmatrix} \check{\mathcal{A}}_o \\ \check{\mathcal{A}}_i \\ \check{\mathcal{A}}_d \end{vmatrix}$$

e che

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \dot{V}_o + \dot{V}_d + \dot{V}_i \\ \dot{V}_2 = \dot{V}_o + \alpha^2 \dot{V}_d + \alpha \dot{V}_i \\ \dot{V}_3 = \dot{V}_o + \alpha \dot{V}_d + \alpha^2 \dot{V}_i \end{cases} \quad \begin{cases} \check{I}_1 = \check{I}_o + \check{I}_i + \check{I}_d \\ \check{I}_2 = \check{I}_o + \alpha^2 \check{I}_i + \alpha \check{I}_d \\ \check{I}_3 = \check{I}_o + \alpha \check{I}_i + \alpha^2 \check{I}_d \end{cases}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \dot{V}_1 \cdot \check{I}_1 + \dot{V}_2 \cdot \check{I}_2 + \dot{V}_3 \cdot \check{I}_3 = \\ &= (\dot{V}_o + \dot{V}_d + \dot{V}_i)(\check{I}_o + \check{I}_i + \check{I}_d) + (\dot{V}_o + \alpha^2 \dot{V}_d + \alpha \dot{V}_i)(\check{I}_o + \alpha^2 \check{I}_i + \alpha \check{I}_d) + (\dot{V}_o + \alpha \dot{V}_d + \alpha^2 \dot{V}_i)(\check{I}_o + \alpha \check{I}_i + \alpha^2 \check{I}_d) \\ &= \dot{V}_o(\check{I}_o + \check{I}_i + \check{I}_d + \check{I}_o + \alpha^2 \check{I}_i + \alpha \check{I}_d + \check{I}_o + \alpha \check{I}_i + \alpha^2 \check{I}_d) + \\ &\quad \dot{V}_d(\check{I}_o + \check{I}_i + \check{I}_d + \alpha^2 \check{I}_o + \alpha^4 \check{I}_i + \alpha^3 \check{I}_d + \alpha \check{I}_o + \alpha^2 \check{I}_i + \alpha^3 \check{I}_d) + \\ &\quad \dot{V}_i(\check{I}_o + \check{I}_i + \check{I}_d + \alpha \check{I}_o + \alpha^3 \check{I}_i + \alpha^2 \check{I}_d + \alpha^2 \check{I}_o + \alpha^3 \check{I}_i + \alpha^4 \check{I}_d) \end{aligned}$$

e notando che:

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= \alpha^0 = 1 \\ \alpha^4 &= \alpha \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \dot{V}_o(\check{I}_o + \check{I}_i + \check{I}_d + \check{I}_o + \alpha^2 \check{I}_i + \alpha \check{I}_d + \check{I}_o + \alpha \check{I}_i + \alpha^2 \check{I}_d) + \\ &\quad \dot{V}_d(\check{I}_o + \check{I}_i + \check{I}_d + \alpha^2 \check{I}_o + \alpha \check{I}_i + \check{I}_d + \alpha \check{I}_o + \alpha^2 \check{I}_i + \check{I}_d) + \\ &\quad \dot{V}_i(\check{I}_o + \check{I}_i + \check{I}_d + \alpha \check{I}_o + \check{I}_i + \alpha^2 \check{I}_d + \alpha^2 \check{I}_o + \check{I}_i + \alpha \check{I}_d) = \\ &= \dot{V}_o[3\check{I}_o + (\check{I}_i + \alpha \check{I}_i + \alpha^2 \check{I}_i) + (\check{I}_d + \alpha \check{I}_d + \alpha^2 \check{I}_d)] + \\ &\quad \dot{V}_d[(\check{I}_o + \alpha \check{I}_o + \alpha^2 \check{I}_o) + (\check{I}_i + \alpha \check{I}_i + \alpha^2 \check{I}_i) + 3\check{I}_d] \\ &\quad \dot{V}_i[(\check{I}_o + \alpha \check{I}_o + \alpha^2 \check{I}_o) + 3\check{I}_i + (\check{I}_d + \alpha \check{I}_d + \alpha^2 \check{I}_d)] \end{aligned}$$

Ricordando inoltre che:

$$(\check{A} + \alpha \check{A} + \alpha^2 \check{A}) = 0$$

Si ottiene

$$\bar{S} = 3(\dot{V}_o \check{I}_o + \dot{V}_d \check{I}_d + \dot{V}_i \check{I}_i)$$

Separando poi la parte reale da quella immaginaria di $\bar{S}$ ed indicando con $\varphi_o, \varphi_d, \varphi_i$ gli angoli di fase dei vettori base delle componenti simmetriche delle tensioni rispetto ai vettori base delle corrispondenti componenti simmetriche delle correnti, si ricavano le espressioni delle potenze attiva e reattiva del sistema:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= 3(\dot{\mathcal{V}}_o \dot{\mathcal{J}}_o + \dot{\mathcal{V}}_d \dot{\mathcal{J}}_d + \dot{\mathcal{V}}_i \dot{\mathcal{J}}_i) = 3(\mathcal{V}_o \mathcal{J}_o e^{j\varphi_o} + \mathcal{V}_d \mathcal{J}_d e^{j\varphi_d} + \mathcal{V}_i \mathcal{J}_i e^{j\varphi_i}) = \\ &= 3[(\mathcal{V}_o \mathcal{J}_o \cos \varphi_o + \mathcal{V}_d \mathcal{J}_d \cos \varphi_d + \mathcal{V}_i \mathcal{J}_i \cos \varphi_i) + j(\mathcal{V}_o \mathcal{J}_o \sin \varphi_o + \mathcal{V}_d \mathcal{J}_d \sin \varphi_d + \mathcal{V}_i \mathcal{J}_i \sin \varphi_i)] = P + jQ\end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned}P &= 3(\mathcal{V}_o \mathcal{J}_o \cos \varphi_o + \mathcal{V}_d \mathcal{J}_d \cos \varphi_d + \mathcal{V}_i \mathcal{J}_i \cos \varphi_i) = \\ &= 3(\dot{\mathcal{V}}_o \cdot \dot{\mathcal{J}}_o + \dot{\mathcal{V}}_d \cdot \dot{\mathcal{J}}_d + \dot{\mathcal{V}}_i \cdot \dot{\mathcal{J}}_i) = \\ &= 3\|\dot{\mathcal{V}}\| \cdot \|\dot{\mathcal{J}}\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q &= 3(\mathcal{V}_o \mathcal{J}_o \sin \varphi_o + \mathcal{V}_d \mathcal{J}_d \sin \varphi_d + \mathcal{V}_i \mathcal{J}_i \sin \varphi_i) = \\ &= 3(\dot{\mathcal{V}}_o \wedge \dot{\mathcal{J}}_o + \dot{\mathcal{V}}_d \wedge \dot{\mathcal{J}}_d + \dot{\mathcal{V}}_i \wedge \dot{\mathcal{J}}_i) = \\ &= 3\|\dot{\mathcal{V}}\| \wedge \|\dot{\mathcal{J}}\|\end{aligned}$$

Da queste espressioni si deduce che *la potenza attiva e quella reattiva sono determinate dalle sole combinazioni fra le componenti simmetriche omonime delle tensioni e delle correnti.*

Nel caso di sistemi a tre conduttori essendo $\mathcal{J}_o = 0$, si ha:

$$\begin{aligned}P &= 3(\dot{\mathcal{V}}_d \cdot \dot{\mathcal{J}}_d + \dot{\mathcal{V}}_i \cdot \dot{\mathcal{J}}_i) \\ Q &= 3(\dot{\mathcal{V}}_d \wedge \dot{\mathcal{J}}_d + \dot{\mathcal{V}}_i \wedge \dot{\mathcal{J}}_i)\end{aligned}$$

Quindi le potenze attiva e reattiva sono determinate dalle sole componenti diretta ed inversa delle tensioni e delle correnti, cioè, come già rilevato, dipendono dalle sole tensioni di linea e sono indipendenti dal centro stella prescelto.

8.5 Analisi dei guasti con le reti di sequenza

Un guasto è una anomalia nel funzionamento di una rete di potenza.

Possiamo avere:

- *Guasto per corto circuito*: contatto fra parti in tensione, quindi tra le fasi, tra le fasi ed il neutro o tra le fasi e la terra. Il contatto può avvenire con impedenza nulla (cortocircuito netto o guasto franco), o con impedenza diversa da zero.
- *Guasto per interruzione*: una o due fasi del sistema vengono interrotte o “aperte”, cioè avviene un evento che annulla la corrente che circola in quelle fasi.

È generalmente valida l'ipotesi che la terna delle tensioni che alimenta il sistema sia *simmetrica*. Il guasto impone, nella sezione in cui avviene, determinati valori di tensione e corrente che comportano, generalmente, terne dissimmetriche e terne squilibrate; sono quindi presenti sia per le tensioni, sia per le correnti, tutte e tre le sequenze. Ogni tipo di guasto può essere studiato con uno specifico collegamento tra i tre circuiti monofase equivalenti di sequenza.

Consideriamo un sistema trifase e analizziamo la sezione S nella quale si ha il guasto, indichiamo con $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$ le **correnti di guasto**

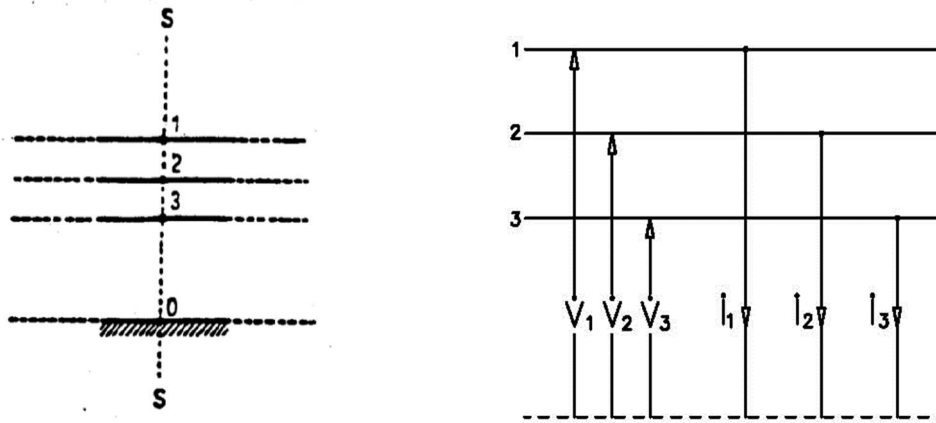


Figura 63 – Sezione di Guasto

Ipotizziamo che:

- il neutro sia a terra;
- la terna $\dot{V}_1$, $\dot{V}_2$, $\dot{V}_3$ sia simmetrica, cioè $\dot{V}_1 = V$, $\dot{V}_2 = Ve^{-j\frac{2}{3}\pi}$, $\dot{V}_3 = Ve^{-j\frac{4}{3}\pi}$

in assenza di guasto si ha:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 &= 0 \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_3 &= 0\end{aligned}$$

Per cui:

$$\begin{cases} \dot{V}_o = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3) = 0 \\ \dot{V}_d = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha\dot{V}_2 + \alpha^2\dot{V}_3) = \frac{1}{3}\left(V + e^{j\frac{2}{3}\pi}Ve^{-j\frac{2}{3}\pi} + e^{j\frac{4}{3}\pi}Ve^{-j\frac{4}{3}\pi}\right) = \frac{1}{3}(V + V + V) = V \\ \dot{V}_i = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha^2\dot{V}_2 + \alpha\dot{V}_3) = \frac{1}{3}\left(V + e^{j\frac{4}{3}\pi}Ve^{-j\frac{2}{3}\pi} + e^{j\frac{2}{3}\pi}Ve^{-j\frac{4}{3}\pi}\right) = \frac{1}{3}(V + Ve^{j\frac{2}{3}\pi} + Ve^{j\frac{4}{3}\pi}) = 0 \end{cases}$$

$$(e^{j\frac{2}{3}\pi}e^{-j\frac{4}{3}\pi} = e^{-j\frac{2}{3}\pi} = e^{j\frac{4}{3}\pi})$$

e, essendo nulle le correnti di guasto:

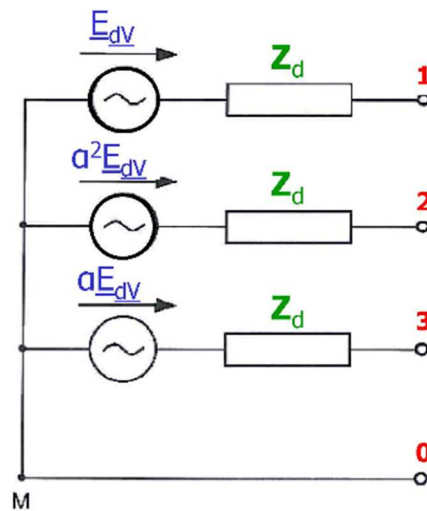
$$\begin{cases} j_o = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3) = 0 \\ j_d = \frac{1}{3}(I_1 + \alpha I_2 + \alpha^2 I_3) = 0 \\ j_i = \frac{1}{3}(I_1 + \alpha^2 I_2 + \alpha I_3) = 0 \end{cases}$$

da cui:

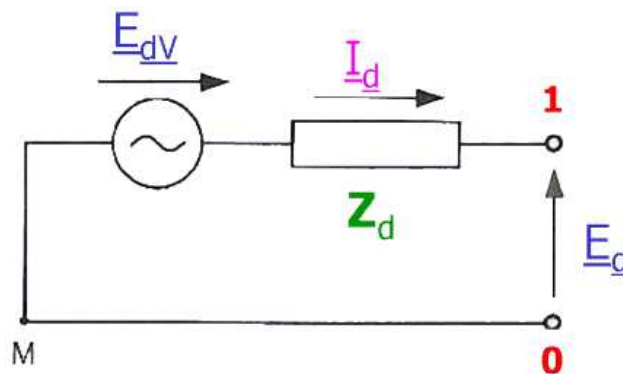
$$j_o = j_d = j_i = 0$$

Possiamo quindi scomporre la rete trifase nella sezione di guasto in tre circuiti equivalenti rispettivamente di sequenza diretta, inversa ed omopolare:

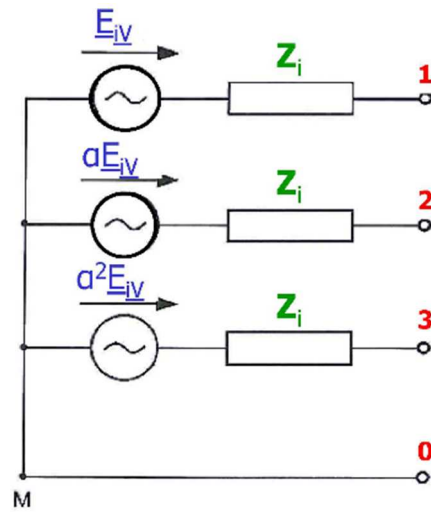
8.5.1 Circuito equivalente di sequenza diretta



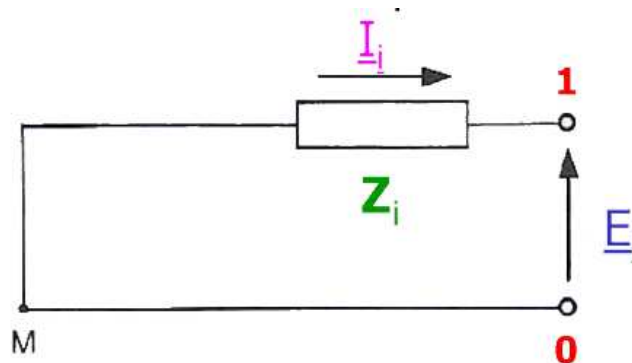
- E_{dv} componente diretta della tensione a vuoto della rete
- Z_d impedenza equivalente di rete alla sequenza diretta
- Terna equilibrata di correnti, quindi, corrente nulla nel nodo M
- Circuito trifase simmetrico ed equilibrato, per cui, circuito monofase equivalente:



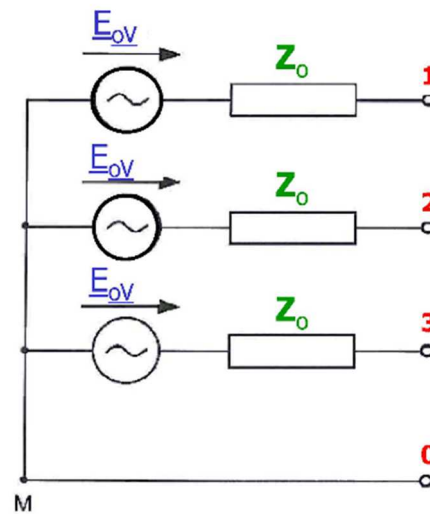
8.5.2 Circuito equivalente di sequenza inversa



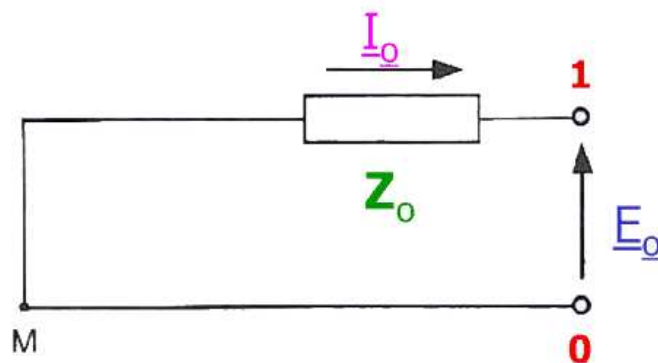
- E_{iv} componente inversa della tensione a vuoto della rete, nulla perché terna generatori simmetrica e quindi di sequenza diretta
- Z_i impedenza equivalente di rete alla sequenza inversa
- Terna equilibrata di correnti, quindi, corrente nulla nel nodo M
- Circuito trifase simmetrico ed equilibrato, per cui, circuito monofase equivalente:



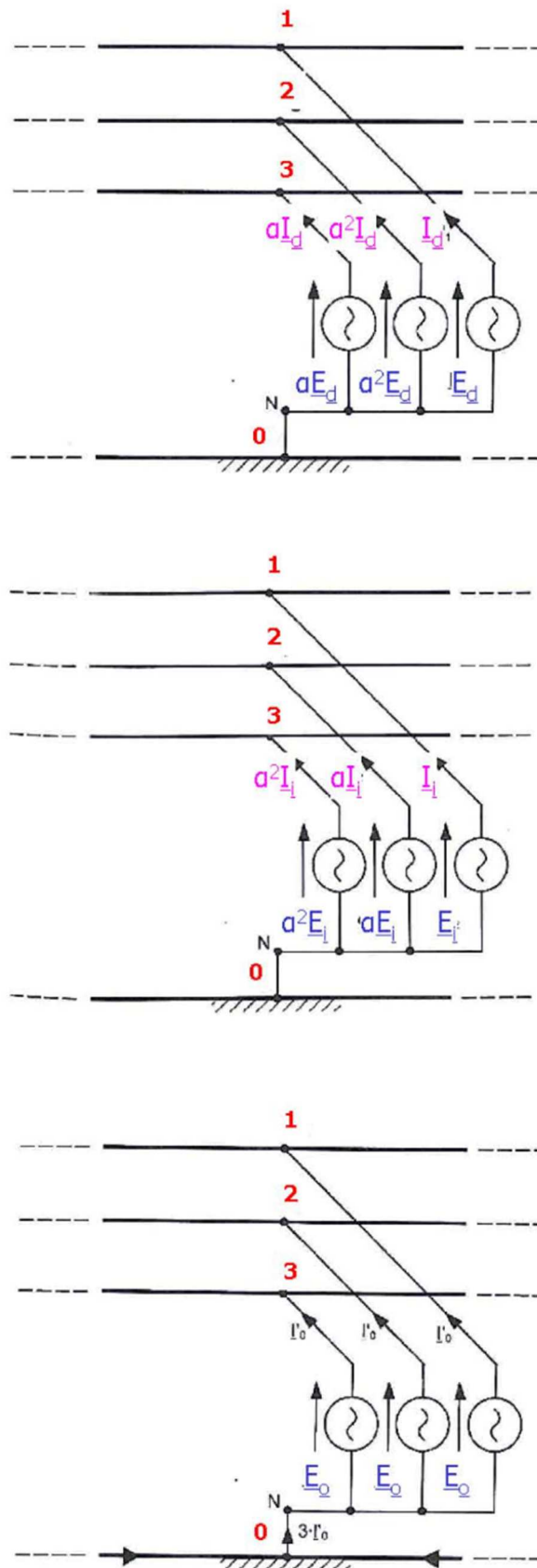
8.5.3 Circuito equivalente di sequenza omopolare



- E_{0v} componente omopolare della tensione a vuoto della rete, nulla perché terna generatori simmetrica e quindi di sequenza diretta
- Z_0 impedenza equivalente di rete alla sequenza inversa
- Terna spuria di correnti, quindi, corrente nel nodo M pari a $3I_0$
- Circuito trifase simmetrico ed equilibrato, per cui, circuito monofase equivalente:



8.5.4 Scomposizione di una rete trifase nella sezione S di guasto



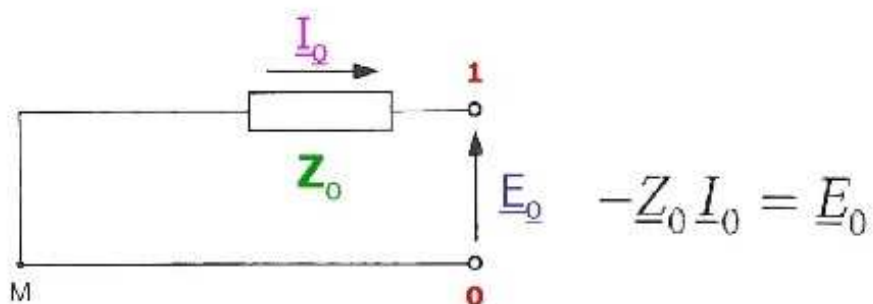
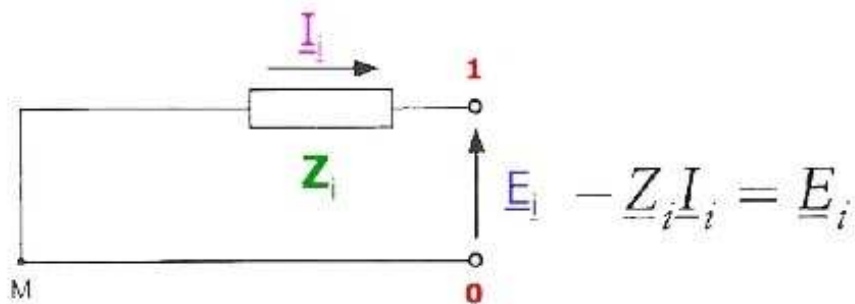
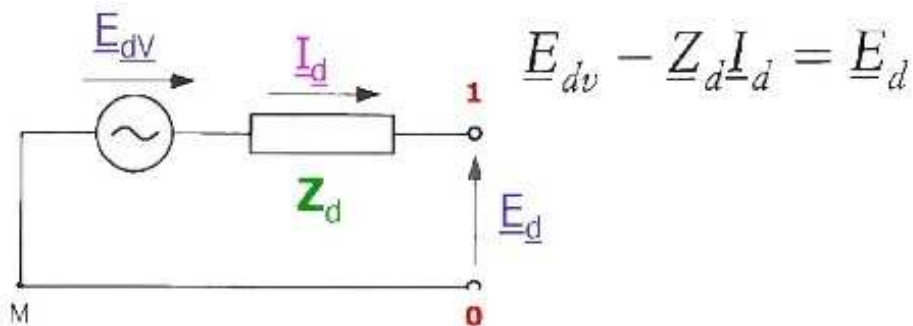
L'impedenza equivalente di rete alle rispettive sequenze può essere determinata in due modi:

- *misura in rete*: si applica alla sezione l'omonima sequenza di tensioni e si misurano le terne di correnti ottenute, dopo aver annullato le f.e.m di tutti i generatori della rete (equivale a diseccitare i generatori mantenendoli in rotazione). In una rete fisicamente simmetrica, terne di tensioni e correnti appartengono alla stessa sequenza
- *analisi dello schema di rete*: si sintetizza lo schema della rete dopo aver annullato i generatori di rete (si sostituiscono con un cortocircuito le f.e.m dei generatori di tensione e si "aprono" quelli di corrente).

La rete trifase attiva, fisicamente simmetrica e con generatori di tensione a sequenza diretta, vista dalla sezione di guasto è equivalente a tre circuiti monofasi alle tre sequenze omopolare, diretta ed inversa.

Le relazioni tra tensione e corrente di ciascuna sequenza sono date dal relativo circuito monofase equivalente.

Ulteriori relazioni derivano dalle condizioni del guasto nella sezione.



Caso 1a: Cortocircuito franco tra una fase e terra

Il cortocircuito franco tra la fase 1 e la terra è riportato in figura 64a.

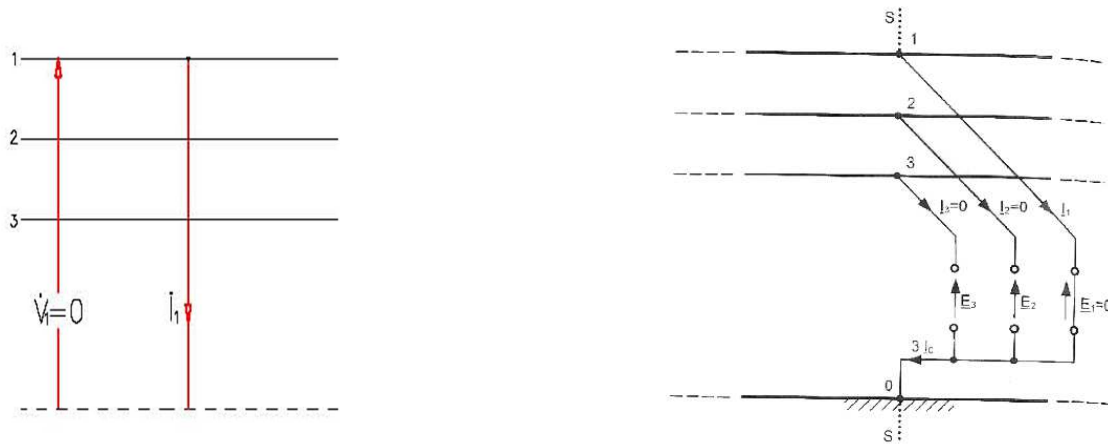


Figura 64a - Cortocircuito franco tra una fase e terra

Per il tipo di guasto si ha:

$$\dot{V}_1 = 0 \quad \text{da cui} \quad \dot{V}_1 = \dot{V}_o + \dot{V}_d + \dot{V}_i = 0$$

$$I_2 = I_3 = 0$$

quindi:

$$\begin{cases} \dot{J}_o = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3) = \frac{1}{3}(I_1 + 0 + 0) = \frac{1}{3}I_1 \\ \dot{J}_d = \frac{1}{3}(I_1 + \alpha I_2 + \alpha^2 I_3) = \frac{1}{3}(I_1 + \alpha 0 + \alpha^2 0) = \frac{1}{3}I_1 \\ \dot{J}_i = \frac{1}{3}(I_1 + \alpha^2 I_2 + \alpha I_3) = \frac{1}{3}(I_1 + \alpha^2 0 + \alpha 0) = \frac{1}{3}I_1 \end{cases}$$

Cioè:

$$\dot{J}_o = \dot{J}_d = \dot{J}_i = \frac{1}{3}I_1$$

In conclusione

$$\dot{V}_o + \dot{V}_d + \dot{V}_i = 0 \quad \dot{J}_o = \dot{J}_d = \dot{J}_i = \frac{1}{3}I_1$$

Queste condizioni sono soddisfatte collegando in serie le tre reti di sequenza (Figura 64b).

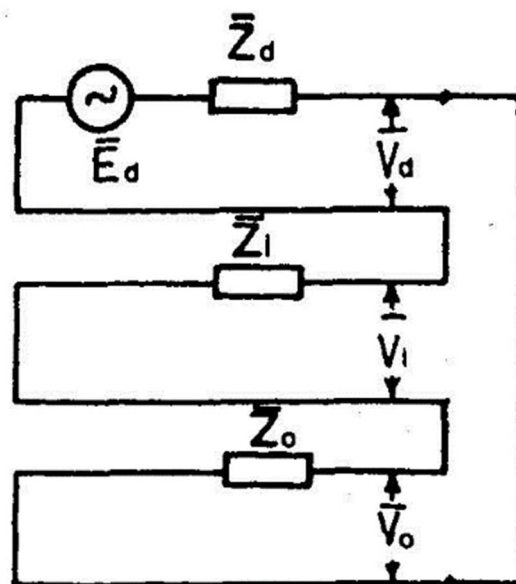
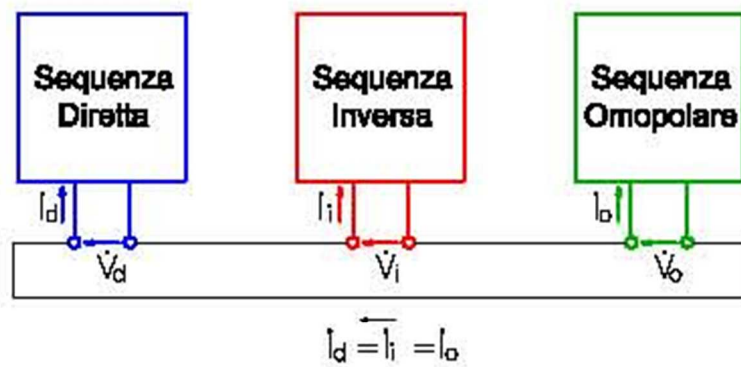


Figura 64b - Cortocircuito franco tra una fase e terra

Caso 1b: Guasto a terra con impedenza tra una fase e terra

Il guasto a terra con impedenza tra la fase 1 e la terra è riportato in figura 64c.

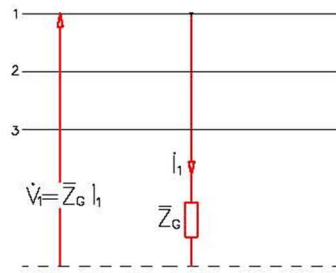


Figura 64c - Guasto a terra con impedenza tra una fase e terra

Per il tipo di guasto si ha:

$$\dot{V}_1 = \bar{Z}_G \dot{I}_1 \quad \text{da cui} \quad \dot{V}_1 = \dot{V}_o + \dot{V}_d + \dot{V}_i = \bar{Z}_G \dot{I}_1$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_3 = 0$$

quindi:

$$\begin{cases} \dot{J}_o = \frac{1}{3} (\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3) = \frac{1}{3} (\dot{I}_1 + 0 + 0) = \frac{1}{3} \dot{I}_1 \\ \dot{J}_d = \frac{1}{3} (\dot{I}_1 + \alpha \dot{I}_2 + \alpha^2 \dot{I}_3) = \frac{1}{3} (\dot{I}_1 + \alpha 0 + \alpha^2 0) = \frac{1}{3} \dot{I}_1 \\ \dot{J}_i = \frac{1}{3} (\dot{I}_1 + \alpha^2 \dot{I}_2 + \alpha \dot{I}_3) = \frac{1}{3} (\dot{I}_1 + \alpha^2 0 + \alpha 0) = \frac{1}{3} \dot{I}_1 \end{cases}$$

Cioè:

$$\dot{J}_o = \dot{J}_d = \dot{J}_i = \frac{1}{3} \dot{I}_1$$

In conclusione

$$\dot{V}_o + \dot{V}_d + \dot{V}_i = \bar{Z}_G \dot{I}_1 \quad \dot{J}_o = \dot{J}_d = \dot{J}_i = \frac{1}{3} \dot{I}_1$$

Queste condizioni sono soddisfatte collegando in serie le tre reti di sequenza (Figura 64d).

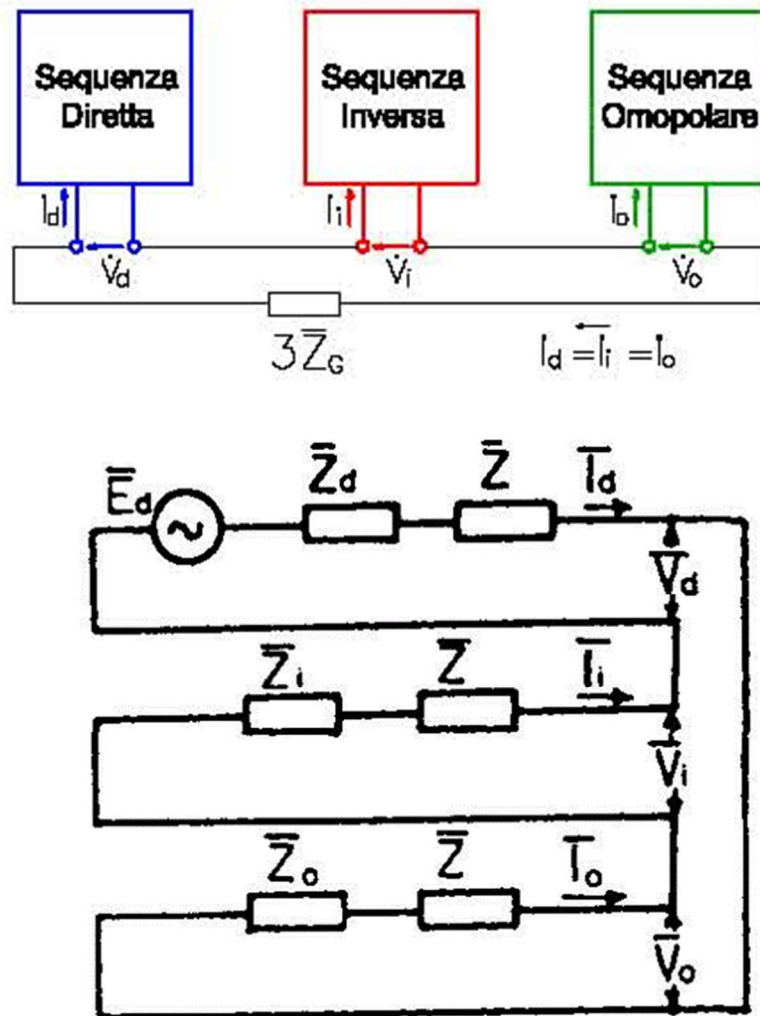


Figura 64d - Guasto a terra con impedenza tra una fase e terra

Caso 2: Cortocircuito tra due fasi

Il cortocircuito tra le fasi 1 e 2 è riportato in figura 65a.



Figura 65a - Cortocircuito tra due fasi

Per il tipo di guasto si ha:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{23} &= 0 & \text{da cui} & & \dot{V}_2 &= \dot{V}_3 = \dot{V} \\ \dot{I}_1 &= 0 & \text{e} & & \dot{I}_2 &= -\dot{I}_3 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \dot{V}_o = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3) = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \dot{V} + \dot{V}) \\ \dot{V}_d = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha\dot{V}_2 + \alpha^2\dot{V}_3) = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha\dot{V} + \alpha^2\dot{V}) \\ \dot{V}_i = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha^2\dot{V}_2 + \alpha\dot{V}_3) = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha\dot{V} + \alpha^2\dot{V}) = \dot{V}_d \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{J}_o = \frac{1}{3}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3) = \frac{1}{3}(0 - \dot{I}_3 + \dot{I}_3) = 0 \\ \dot{J}_d = \frac{1}{3}(\dot{I}_1 + \alpha\dot{I}_2 + \alpha^2\dot{I}_3) = \frac{1}{3}(0 - \alpha\dot{I}_3 + \alpha^2\dot{I}_3) \\ \dot{J}_i = \frac{1}{3}(\dot{I}_1 + \alpha^2\dot{I}_2 + \alpha\dot{I}_3) = \frac{1}{3}(0 - \alpha^2\dot{I}_3 + \alpha\dot{I}_3) = -\dot{J}_d \end{cases}$$

In conclusione

$$\dot{V}_i = \dot{V}_d \quad \dot{J}_o = 0 \quad \dot{J}_i = -\dot{J}_d$$

Queste condizioni sono soddisfatte collegando in parallelo le due reti di sequenza diretta ed inversa e lasciando aperta quella di sequenza omopolare (Figura 65b).

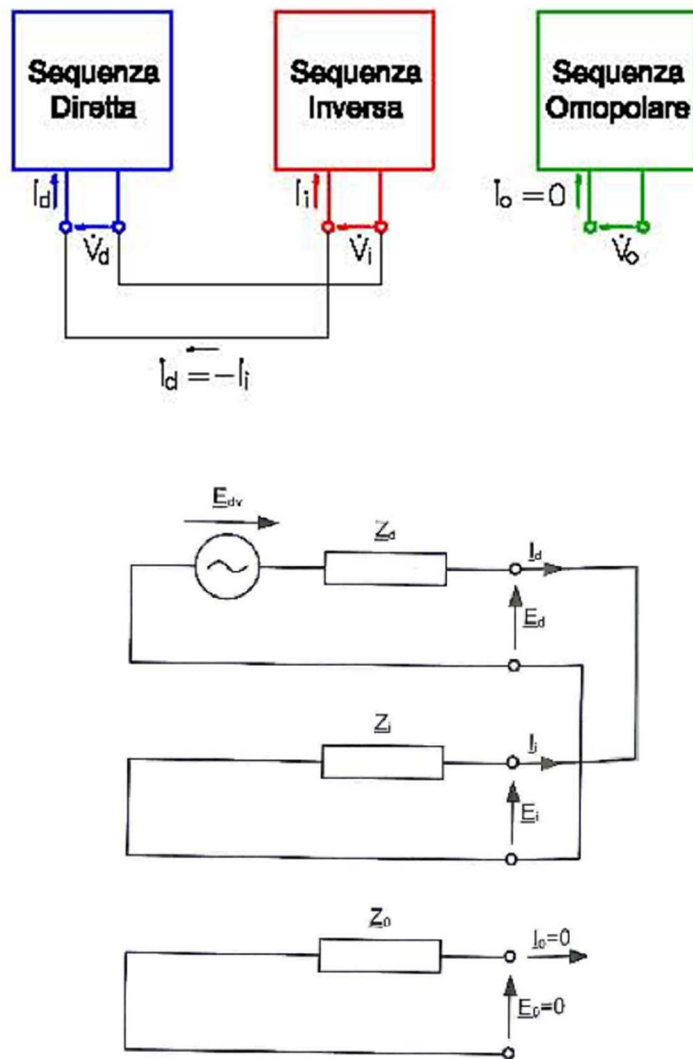


Figura 65b - Cortocircuito tra due fasi

Caso 3: Cortocircuito tra due fasi e terra

Il cortocircuito tra le fasi 1, 2 e terra è riportato in figura 66a.



Figura 66a - Cortocircuito tra due fasi e terra

Per il tipo di guasto si ha:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_3 = 0$$

$$i_1 = 0 \quad \text{e} \quad i_2 = -i_3$$

Quindi:

$$\begin{cases} \dot{V}_o = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3) = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + 0 + 0) = \frac{1}{3}\dot{V}_1 \\ \dot{V}_d = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha\dot{V}_2 + \alpha^2\dot{V}_3) = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha 0 + \alpha^2 0) = \frac{1}{3}\dot{V}_1 \\ \dot{V}_i = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha^2\dot{V}_2 + \alpha\dot{V}_3) = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha^2 0 + \alpha 0) = \frac{1}{3}\dot{V}_1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{J}_o = \frac{1}{3}(i_1 + i_2 + i_3) = \frac{1}{3}(0 - i_3 + i_3) = 0 \\ \dot{J}_d = \frac{1}{3}(i_1 + \alpha i_2 + \alpha^2 i_3) = \frac{1}{3}(0 - \alpha i_3 + \alpha^2 i_3) \\ \dot{J}_i = \frac{1}{3}(i_1 + \alpha^2 i_2 + \alpha i_3) = \frac{1}{3}(0 - \alpha^2 i_3 + \alpha i_3) = -\dot{J}_d \end{cases}$$

In conclusione

$$\dot{V}_o = \dot{V}_d = \dot{V}_i = \frac{1}{3}\dot{V}_1 \quad \dot{J}_o + \dot{J}_d + \dot{J}_i = 0$$

Queste condizioni sono soddisfatte collegando in parallelo le tre reti di sequenza diretta, inversa e omopolare (Figura 66b).

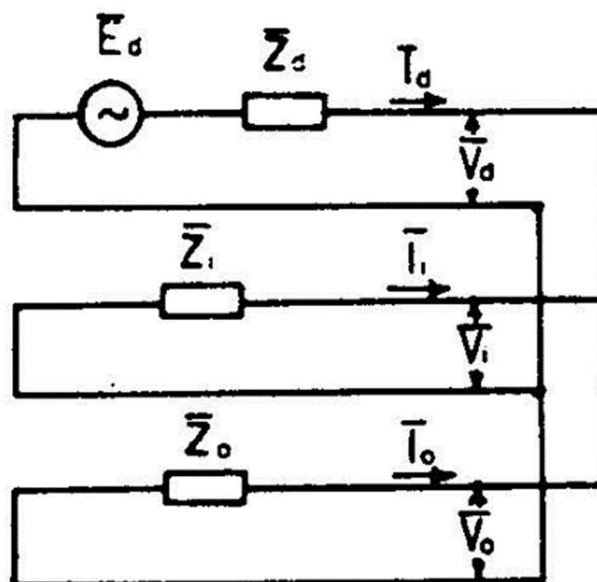
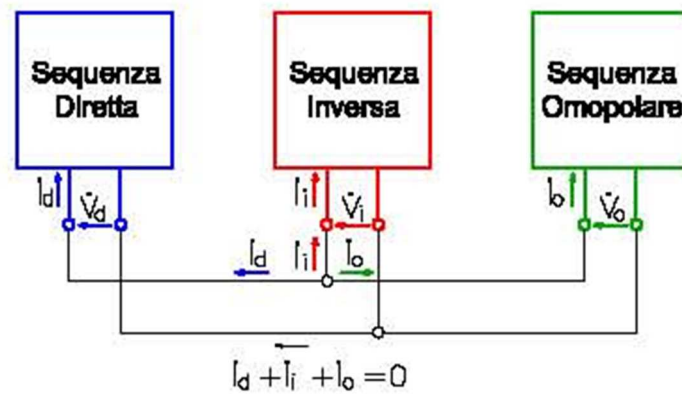


Figura 66b - Cortocircuito tra due fasi e terra

Caso 4: Cortocircuito trifase

Il cortocircuito trifase è riportato in figura 67a.

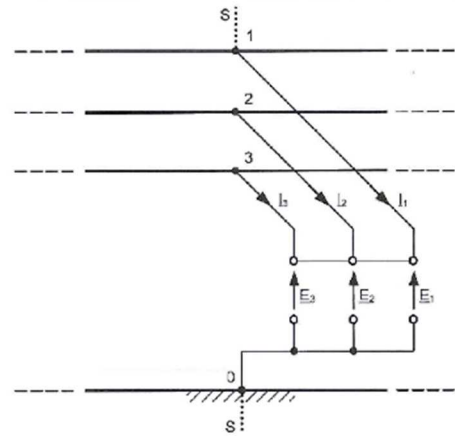
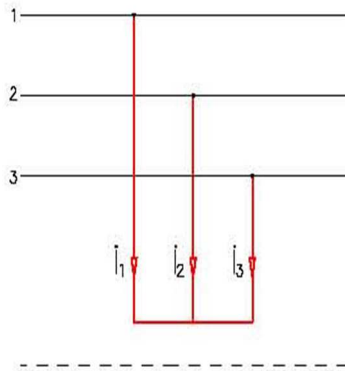


Figura 67a - Cortocircuito trifase

Per il tipo di guasto si ha:

$$\dot{V}_{12} = \dot{V}_{23} = \dot{V}_{31} = 0 \quad \text{da cui} \quad \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V}_3 = \dot{V}$$

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$$

Quindi:

$$\begin{cases} \dot{V}_o = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3) = \frac{1}{3}(\dot{V} + \dot{V} + \dot{V}) = \dot{V} \\ \dot{V}_d = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha\dot{V}_2 + \alpha^2\dot{V}_3) = \frac{1}{3}(\dot{V} + \alpha\dot{V} + \alpha^2\dot{V}) = \frac{1}{3}\dot{V}(1 + \alpha + \alpha^2) = 0 \\ \dot{V}_i = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha^2\dot{V}_2 + \alpha\dot{V}_3) = \frac{1}{3}(\dot{V} + \alpha^2\dot{V} + \alpha\dot{V}) = \frac{1}{3}\dot{V}(1 + \alpha^2 + \alpha) = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{J}_o = \frac{1}{3}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3) = \frac{1}{3}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3) = 0 \\ \dot{J}_d = \frac{1}{3}(\dot{I}_1 + \alpha\dot{I}_2 + \alpha^2\dot{I}_3) \\ \dot{J}_i = \frac{1}{3}(\dot{I}_1 + \alpha^2\dot{I}_2 + \alpha\dot{I}_3) \end{cases}$$

In conclusione

$$\dot{V}_d = \dot{V}_i = 0 \quad \dot{J}_o = 0$$

Queste condizioni sono soddisfatte cortocircuitando le reti di sequenza diretta e di sequenza inversa e lasciando aperta la rete di sequenza omopolare (Figura 67b).

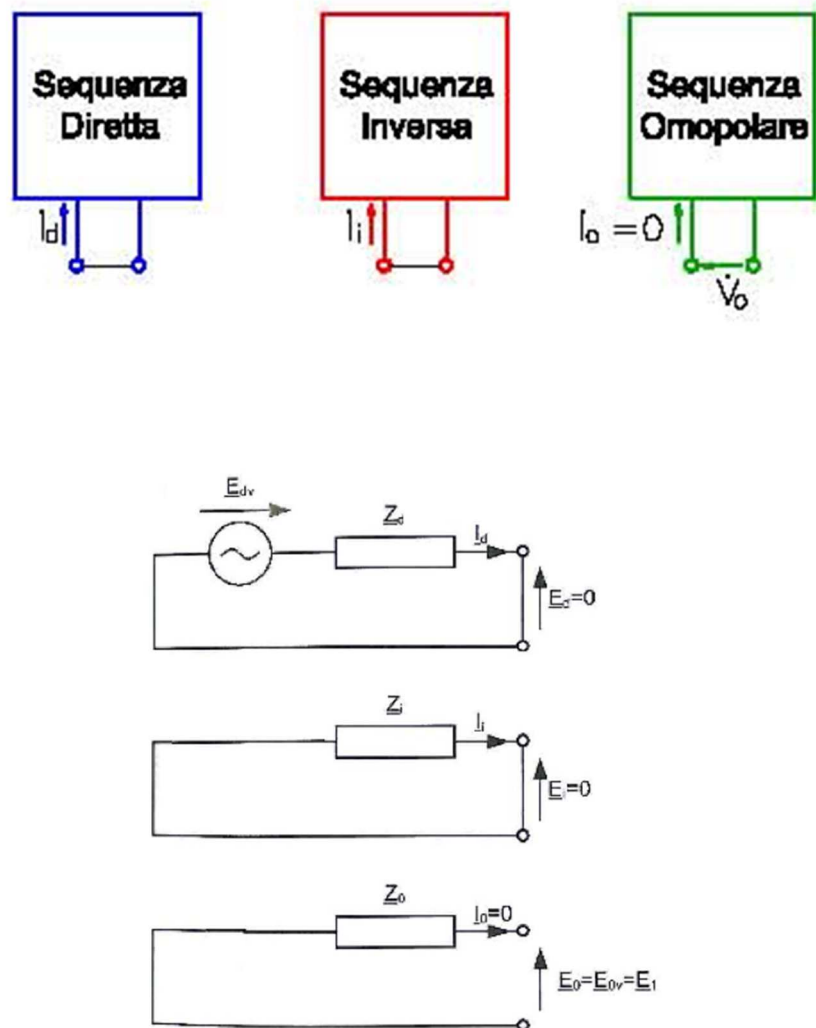


Figura 67b - Cortocircuito trifase

Caso 5: Cortocircuito trifase a terra

Il cortocircuito trifase a terra è riportato in figura 68a.



Figura 68a - Cortocircuito trifase a terra

Per il tipo di guasto si ha:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V}_3 = 0$$

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$$

Quindi:

$$\begin{cases} \dot{V}_o = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3) = \frac{1}{3}(0 + 0 + 0) = 0 \\ \dot{V}_d = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha\dot{V}_2 + \alpha^2\dot{V}_3) = \frac{1}{3}(0 + \alpha 0 + \alpha^2 0) = 0 \\ \dot{V}_i = \frac{1}{3}(\dot{V}_1 + \alpha^2\dot{V}_2 + \alpha\dot{V}_3) = \frac{1}{3}(0 + \alpha^2 0 + \alpha 0) = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{J}_o = \frac{1}{3}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3) = \frac{1}{3}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3) = 0 \\ \dot{J}_d = \frac{1}{3}(\dot{I}_1 + \alpha\dot{I}_2 + \alpha^2\dot{I}_3) \\ \dot{J}_i = \frac{1}{3}(\dot{I}_1 + \alpha^2\dot{I}_2 + \alpha\dot{I}_3) \end{cases}$$

In conclusione

$$\dot{V}_d = \dot{V}_i = \dot{V}_o = 0 \qquad \dot{J}_o = 0$$

Queste condizioni sono soddisfatte cortocircuitando le tre reti di sequenza diretta, di sequenza inversa e di sequenza omopolare (Figura 68b).

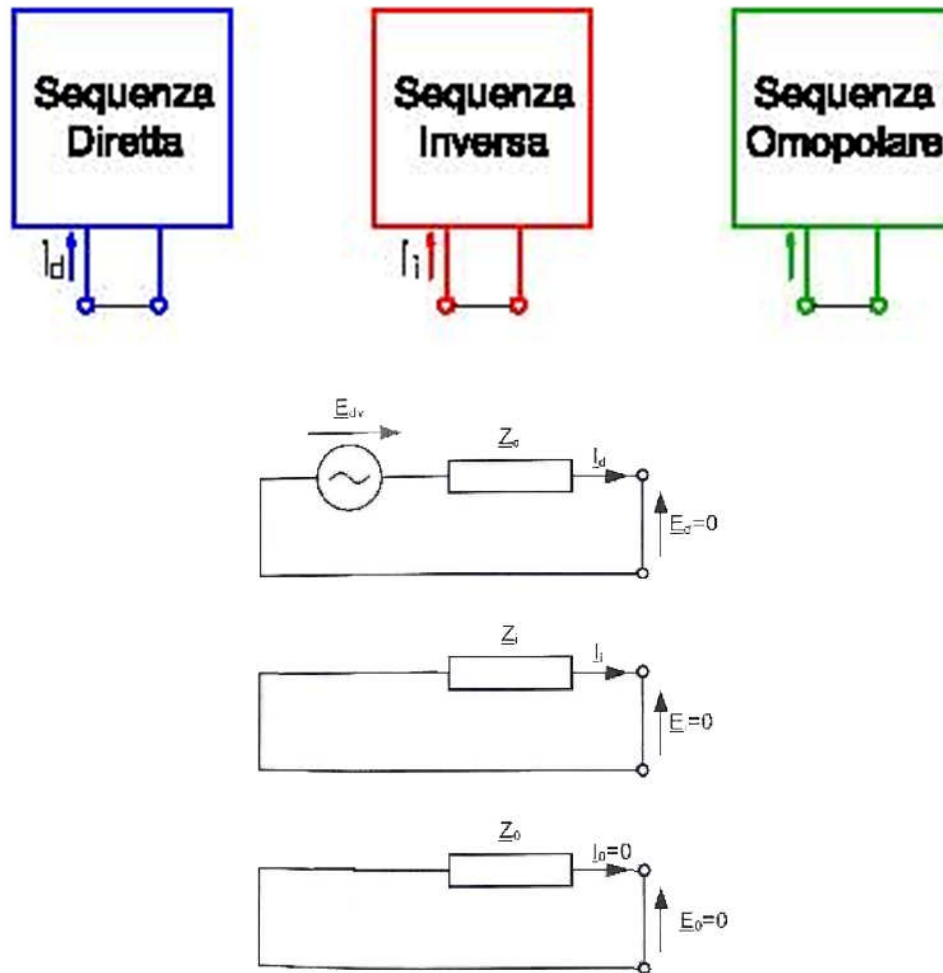
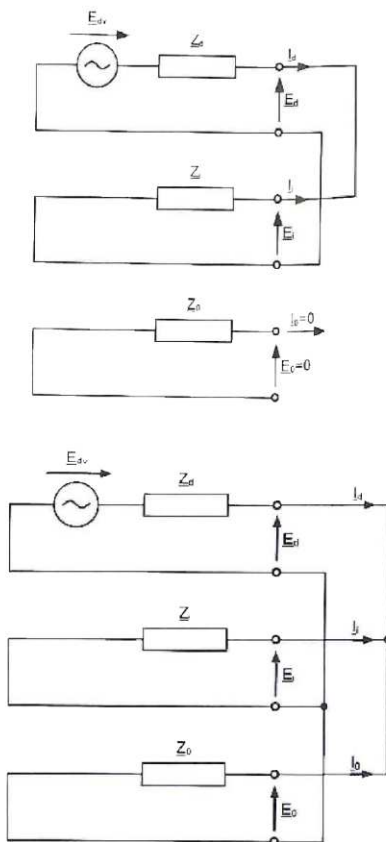


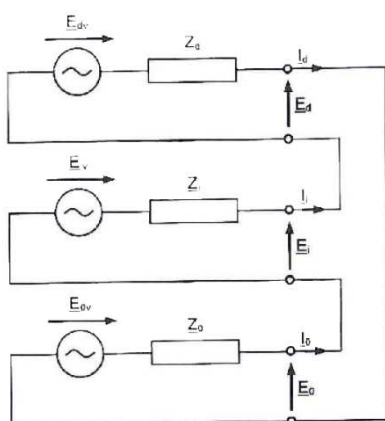
Figura 68b - Cortocircuito trifase a terra

Cto Cto Bifase



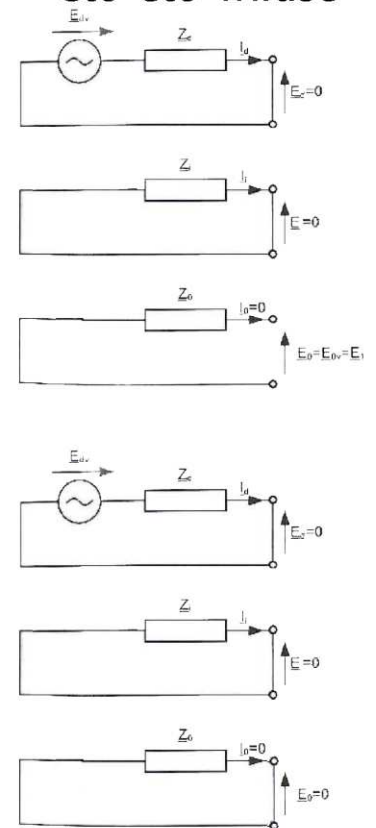
Cto Cto Bifase-Monofase

Cto Cto Monofase



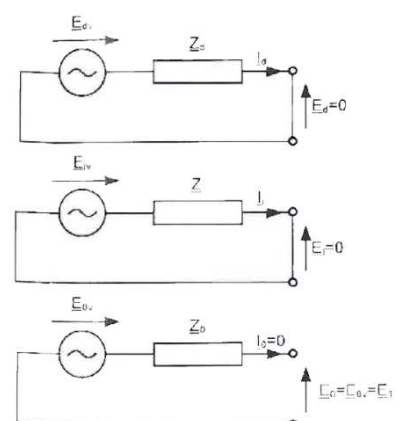
**I GUASTI A
TERRA
COINVOLGONO
SEMPRE IL
CIRCUITO
MONOFASE
EQUIVALENTE
ALLA
SEQUENZA
OMOPOLARE!**

Cto Cto Trifase

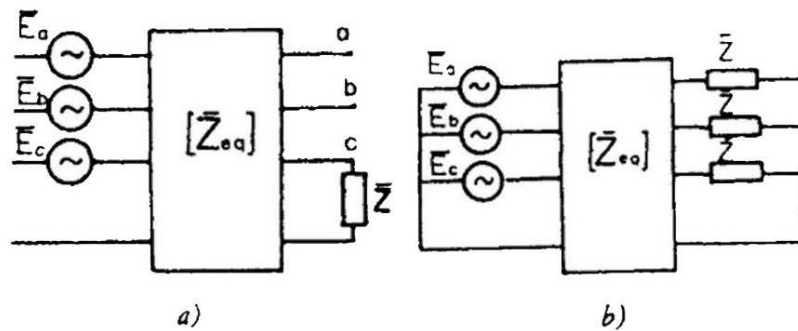


Cto Cto Trifase-Monofase

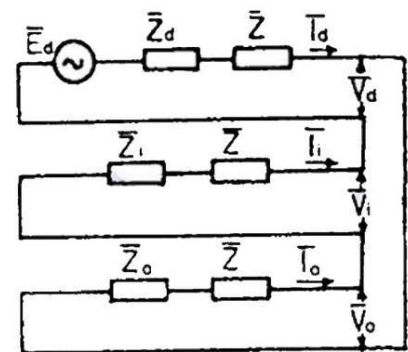
Cto Cto Trifase



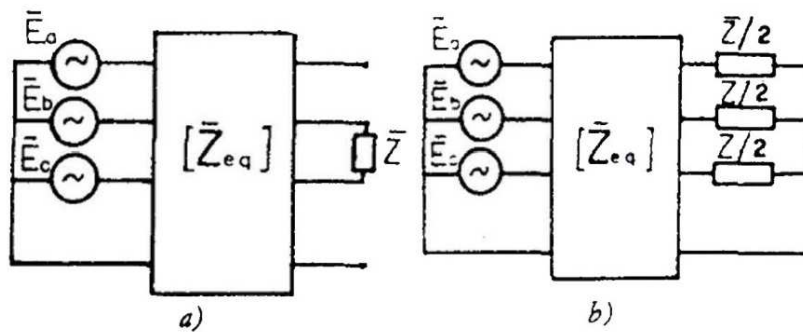
- Se le tensioni a vuoto della rete non sono una terna simmetrica, i circuiti equivalenti monofasi sono tutti bipoli attivi contenenti un generatore di tensione a vuoto nella rispettiva sequenza
- I collegamenti tra i circuiti equivalenti monofasi, rimangono gli stessi



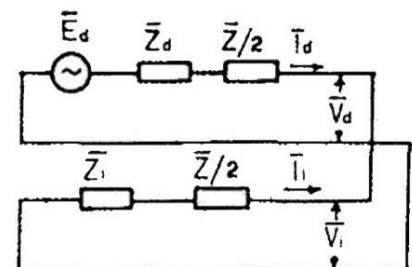
a-b - Schema di corto circuito monofase in una rete trifase con impedenza di guasto.



Schema di connessione delle reti di sequenza per corto circuito monofase con impedenza di guasto.



Schema di corto circuito bifase con impedenza di guasto.



Schema di connessione delle reti di sequenza per corto circuito bifase con impedenza di guasto.

8.5.5 Scomposizione di una rete trifase nella sezione 1-1'

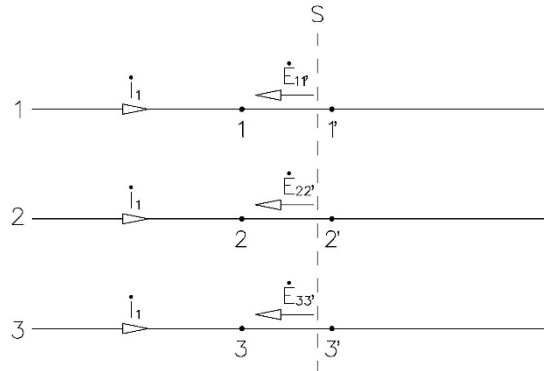


Figura 69

Circuiti equivalenti della rete dalle coppie dei morsetti 1-1', 2-2' e 3-3'.

E_{dv} , E_{iv} , E_{ov} tensioni a vuoto della rete alle sequenze diretta, inversa e omopolare viste dalle coppie dei morsetti 1-1', 2-2' e 3-3'.

Z_d , Z_i , Z_o impedenza equivalente di rete alle sequenze diretta, inversa e omopolare vista dalle coppie dei morsetti 1-1', 2-2' e 3-3'.

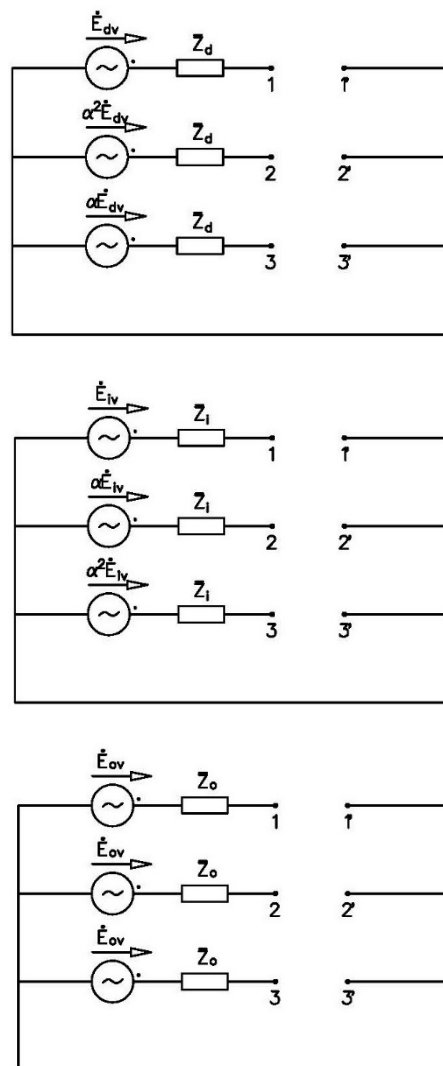


Figura 69a

ATTENZIONE:

E_{dv} , E_{iv} , E_{ov} e Z_d , Z_i , Z_o sono diverse dal caso della rete vista dalla sezione S (coppie di morsetti 1-0, 2-0, 3-0).

Generatori della rete sono una terna simmetrica diretta per cui le tensioni a vuoto alla sequenza inversa ed omopolare sono nulle ($E_{iv} = E_{ov} = 0$).

Circuiti trifase alle sequenze simmetrici per cui i circuiti monofase equivalenti alle sequenze sono:

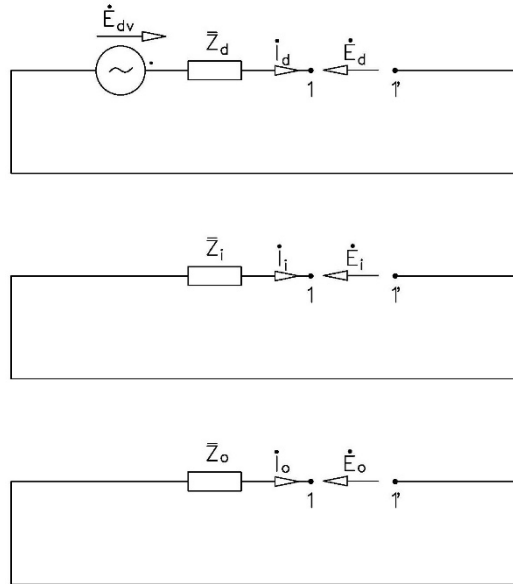


Figura 70

$$\begin{cases} \dot{E}_d = \dot{E}_{dv} - \bar{Z}_d \dot{I}_d \\ \dot{E}_i = -\bar{Z}_i \dot{I}_i \\ \dot{E}_o = -\bar{Z}_{oi} \dot{I}_o \end{cases}$$

Caso 1a: Interruzione di un conduttore di fase

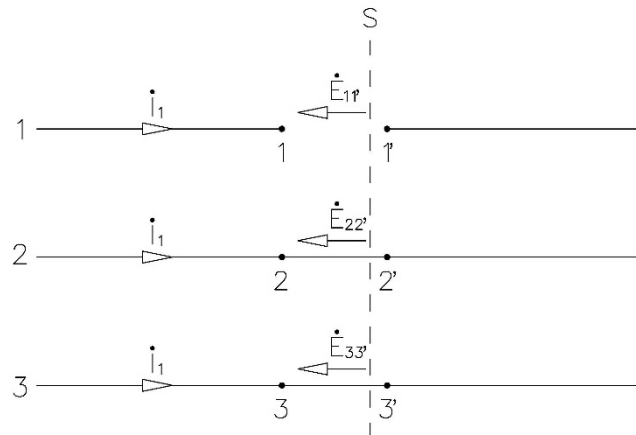


Figura 71

In questo caso abbiamo:

$$\dot{E}_{22'} = \dot{E}_{33'} = 0 \quad e \quad I_1 = 0$$

Da cui

$$\begin{cases} \dot{E}_d = \frac{\dot{E}_{11'}}{3} \\ \dot{E}_i = \frac{\dot{E}_{11'}}{3} \\ \dot{E}_0 = \frac{\dot{E}_{11'}}{3} \\ I_d + I_i + I_o = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \dot{E}_d = \dot{E}_i \\ \dot{E}_d = \dot{E}_o \\ I_d + I_i + I_o = 0 \\ \dot{E}_d = \dot{E}_{dv} - \bar{Z}_d I_d \\ \dot{E}_i = -\bar{Z}_i I_i \\ \dot{E}_o = -\bar{Z}_{oi} I_o \end{cases}$$

I circuiti monofase equivalenti alle sequenze, saranno quindi:

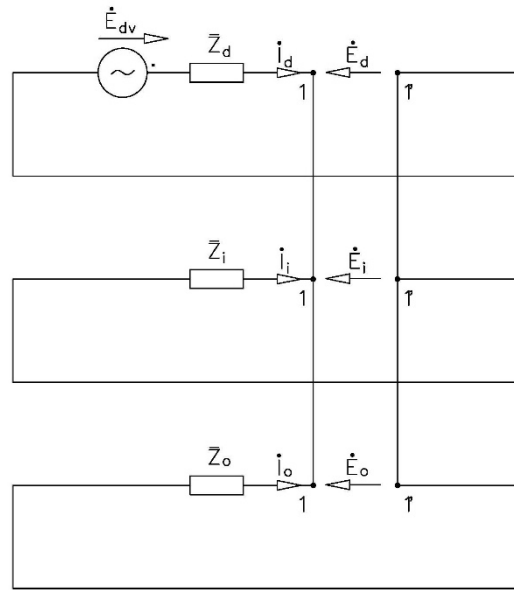


Figura 71a

Da cui:

$$\underline{E}_0 = \underline{E}_i = \underline{E}_d = \frac{E_{dv}}{Z_d + \frac{Z_i Z_0}{Z_i + Z_0}} \frac{Z_i Z_0}{Z_i + Z_0} =$$

$$= E_{dv} \frac{Z_i Z_0}{Z_d Z_i + Z_d Z_0 + Z_i Z_0}$$

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{E}_{dv}}{Z_d + \frac{Z_i Z_0}{Z_i + Z_0}} = E_{dv} \frac{Z_i + Z_0}{Z_d Z_i + Z_d Z_0 + Z_i Z_0}$$

$$\underline{I}_i = -\frac{\underline{E}_i}{Z_i} = -E_{dv} \frac{Z_0}{Z_d Z_i + Z_d Z_0 + Z_i Z_0}$$

$$\underline{I}_0 = -\frac{\underline{E}_0}{Z_0} = -E_{dv} \frac{Z_i}{Z_d Z_i + Z_d Z_0 + Z_i Z_0}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_0 + \alpha^2 \underline{I}_d + \alpha \underline{I}_i = \frac{E_{dv}}{Z_d Z_i + Z_d Z_0 + Z_i Z_0} \cdot$$

$$\cdot [Z_i(\alpha^2 - 1) + Z_0(\alpha^2 - \alpha)]$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_0 + \alpha \underline{I}_d + \alpha^2 \underline{I}_i = \frac{E_{dv}}{Z_d Z_i + Z_d Z_0 + Z_i Z_0} \cdot$$

$$\cdot [Z_i(\alpha - 1) + Z_0(\alpha - \alpha^2)]$$

$$\underline{E}_{11'} = \underline{E}_0 + \underline{E}_d + \underline{E}_i = 3E_{dv} \frac{Z_i Z_0}{Z_d Z_i + Z_d Z_0 + Z_i Z_0} \cdot$$

Caso 1b: Interruzione di due conduttori di fase

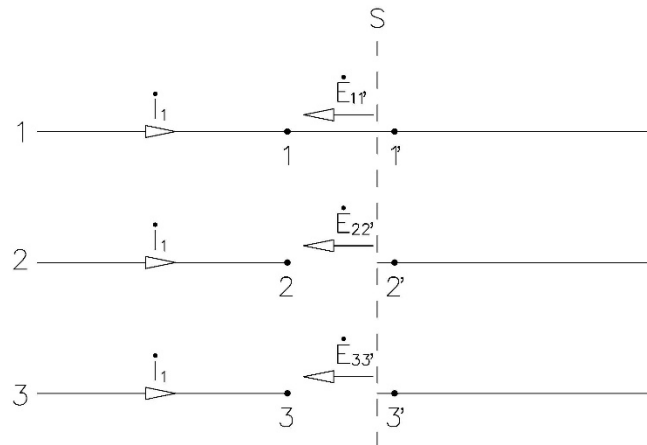


Figura 72

In questo caso abbiamo:

$$\dot{E}_{11'} = 0 \quad e \quad I_2 = I_3 = 0$$

Da cui

$$\begin{cases} \dot{E}_d + \dot{E}_i + \dot{E}_o = 0 \\ I_d = I_i = I_o = 0 \end{cases}$$

I circuiti monofase equivalenti alle sequenze, saranno quindi:

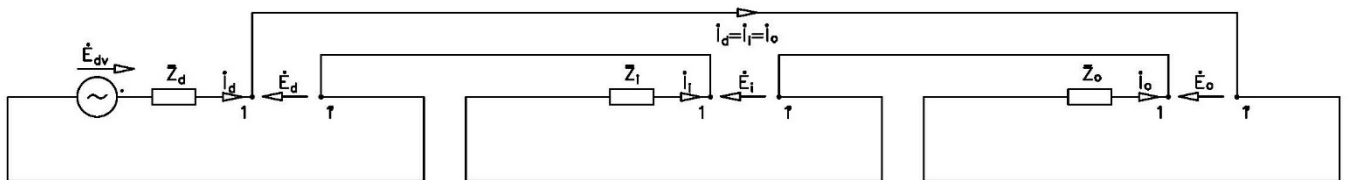


Figura 72a

Quindi:

$$I_1 = I_d + I_i + I_o = \frac{3E_{dv}}{Z_d + Z_i + Z_o}$$

$$E_d = E_{dv} \frac{Z_i + Z_o}{Z_d + Z_i + Z_o}$$

$$E_i = E_{dv} \frac{-Z_i}{Z_d + Z_i + Z_o}$$

$$E_o = E_{dv} \frac{-Z_o}{Z_d + Z_i + Z_o}$$

$$E_{22'} = E_{dv} \frac{Z_i(\alpha^2 - \alpha) + Z_o(\alpha^2 - 1)}{Z_d + Z_i + Z_o}$$

$$E_{33'} = E_{dv} \frac{Z_i(\alpha - \alpha^2) + Z_o(\alpha - 1)}{Z_d + Z_i + Z_o}.$$

Sommario

Sistemi trifase	Errore. Il segnalibro non è definito.
1 Generalità.....	Errore. Il segnalibro non è definito.
1.1 Sistemi simmetrici di tensioni	Errore. Il segnalibro non è definito.
1.2 Sistemi equilibrati di correnti	Errore. Il segnalibro non è definito.
2 Sistemi simmetrici ed equilibrati	Errore. Il segnalibro non è definito.
2.1 Potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati	Errore. Il segnalibro non è definito.
2.2 Campo magnetico rotante di Galileo Ferraris	Errore. Il segnalibro non è definito.
3 Sistemi dissimmetrici e squilibrati.....	Errore. Il segnalibro non è definito.
3.1 Tensioni e correnti nei sistemi trifase a tre fili	Errore. Il segnalibro non è definito.
3.2 I centri stella nei sistemi trifase dissimmetrici e squilibrati	Errore. Il segnalibro non è definito.
Data una linea trifase ed il relativo sistema di tensioni concatenate V12, V23, V31, chiameremo genericamente centro stella	Errore. Il segnalibro non è definito.
3.3 Potenza nei sistemi dissimmetrici e squilibrati	Errore. Il segnalibro non è definito.
3.4 Teorema di Aron	Errore. Il segnalibro non è definito.
4 Misura delle potenze nei sistemi trifase.....	Errore. Il segnalibro non è definito.
4.1 Misure con wattmetri monofase	Errore. Il segnalibro non è definito.
Inserzione aciclica	Errore. Il segnalibro non è definito.
Inserzione ciclica	Errore. Il segnalibro non è definito.
Inserzione in quadratura	Errore. Il segnalibro non è definito.
Inserzione Aron	Errore. Il segnalibro non è definito.
Inserzione Righi	Errore. Il segnalibro non è definito.
Inserzione Barbagelata	Errore. Il segnalibro non è definito.
Misure con wattmetri trifase	Errore. Il segnalibro non è definito.
4.2 Misura delle potenze nei sistemi simmetrici ed equilibrati	Errore. Il segnalibro non è definito.
4.2.1 Misura del fattore di potenza	Errore. Il segnalibro non è definito.
4.3 Misura delle potenze nei sistemi a tre fili simmetrici e squilibrati	Errore. Il segnalibro non è definito.
4.3.1 Misura di potenza attiva, inserzione Aron	Errore. Il segnalibro non è definito.
4.3.2 Misura di potenza reattiva, inserzione Righi	Errore. Il segnalibro non è definito.
4.3.3 Misura di potenza reattiva, inserzione Barbagelata	Errore. Il segnalibro non è definito.
4.3.4 Misura del fattore di potenza	Errore. Il segnalibro non è definito.
4.4 Misura delle potenze nei sistemi a quattro fili	Errore. Il segnalibro non è definito.
4.4.1 Misura della potenza attiva	Errore. Il segnalibro non è definito.
4.4.2 Misura della potenza reattiva, inserzione ciclica	Errore. Il segnalibro non è definito.
4.5 Misura delle potenze nei sistemi dissimmetrici e squilibrati	Errore. Il segnalibro non è definito.
4.6 Gli errori nelle misure di potenza attiva trifase	Errore. Il segnalibro non è definito.
5 Rifasamento nei sistemi trifase	Errore. Il segnalibro non è definito.
6 Convenienza dell'utilizzo dei sistemi trifase	Errore. Il segnalibro non è definito.
7 Accoppiamenti mutui nei sistemi trifase.....	Errore. Il segnalibro non è definito.
Caso generale	Errore. Il segnalibro non è definito.
Caso particolare	Errore. Il segnalibro non è definito.
8 Studio generale dei sistemi trifase	2
8.1 Rappresentazione matriciale delle grandezze trifase	2
8.1.1 Somma di terne di vettori:	3
8.1.2 Prodotto di una terna di vettori per un numero:	4
8.1.3 Prodotto di una terna di vettori per una terna di numeri:	5
8.1.4 Prodotto di una terna di vettori per una tripla terna di numeri:	6
8.1.5 Rappresentazione matriciale della legge di Ohm, dei principi di Kirchhoff e della potenza trifase	9
8.2 L'algebra delle sequenze	10
8.3 Scomposizione di un sistema trifase di grandezze	15
8.3.1 Proprietà delle componenti simmetriche	18
8.4 Analisi dei sistemi trifase mediante le componenti simmetriche	24
8.4.1 Relazione fra le componenti simmetriche	25

8.4.2	Impedenze di sequenza	26
8.4.3	Legge di Ohm mediante le componenti di sequenza	28
8.4.4	Principi di Kirchhoff mediante le componenti di sequenza	30
8.4.5	Circuito equivalente di sequenza	31
8.4.6	Sistemi fisicamente simmetrici	32
8.4.7	Potenze trifase mediante le componenti di sequenza	33
8.5	Analisi dei guasti con le reti di sequenza	35
8.5.1	Circuito equivalente di sequenza diretta	36
8.5.2	Circuito equivalente di sequenza inversa	37
8.5.3	Circuito equivalente di sequenza omopolare	38
8.5.4	Scomposizione di una rete trifase nella sezione S di guasto	39
8.5.5	Scomposizione di una rete trifase nella sezione 1-1'	55
Sommaro.....		60