UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Sistemi Trifase

Capitolo 6 – Convenienza dell'Utilizzo dei Sistemi Trifase

Capitolo 7 – Accoppiamenti Mutui nei Sistemi Trifase

Anno Accademico 2022-2023

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:
Lezioni di Elettrotecnica Generale *- Giulio Battistini*
Colombo Cursi Pisa
M. Fauri *"Electrical Systems Engineering" Lezione 9*

6 *Convenienza dell'utilizzo dei sistemi trifase*

Oltre alla fondamentale ragione della scelta del sistema trifase che consiste nella possibilità di generare un campo rotante e di rendere più semplici e con migliori caratteristiche di funzionamento motori e generatori, sincroni ed asincroni, una linea trifase risulta anche economicamente conveniente per quanto riguarda l'impiego di rame
Se occorre, infatti, trasmettere una stessa potenza attiva con la medesima tensione, con lo stesso fattore di potenza e con la stessa densità di corrente nei conduttori, il volume del conduttore impiegato per la linea trifase è inferiore rispetto a quello impiegato per la linea monofase. In particolare si ha che il volume di rame necessario per la linea trifase è 0,866 volte il volume necessario della corrispondente linea monofase. Si risparmia pertanto circa il 14% di rame.
Indicando con:

- P_3 la potenza attiva trifase;
- P_1 la potenza attiva monofase;
- I_3 il valore efficace della corrente di linea nel sistema trifase;
- I_1 il valore efficace della corrente di linea nel sistema monofase

abbiamo

$$P_3 = \sqrt{3} V_l I_3 \cos\varphi$$
$$P_1 = V_l I_1 \cos\varphi$$

affinché le due potenze siano uguali, a parità di V_l e $\cos\varphi$, deve essere

$$\sqrt{3} V_l I_3 \cos\varphi = V_l I_1 \cos\varphi \;\rightarrow\; I_3 = \frac{I_1}{\sqrt{3}}$$

dovendo lavorare a parità di densità di corrente e quindi con $\delta_3 = \delta_1 = \delta$, essendo:

$$\delta_3 = \frac{I_3}{S_3}$$
$$\delta_1 = \frac{I_1}{S_1}$$

si ottiene:

$$S_3 = \frac{I_3}{\delta_3} = \frac{I_3}{\delta}$$
$$S_1 = \frac{I_1}{\delta_1} = \frac{I_1}{\delta}$$

da cui

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{\frac{I_3}{\delta}}{\frac{I_1}{\delta}} = \frac{I_3}{\delta} x \frac{\delta}{I_1} = \frac{I_3}{I_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577$$

Quindi, indicando con L la lunghezza della linea, si ottiene:

$$V_3 = 3xS_3xL$$
$$V_1 = 2xS_1xL$$

da cui

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{3}{2}\frac{S_3}{S_1} = \frac{3}{2} x \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

Caso generale
Sia dato il seguente sistema trifase, fig. 42:

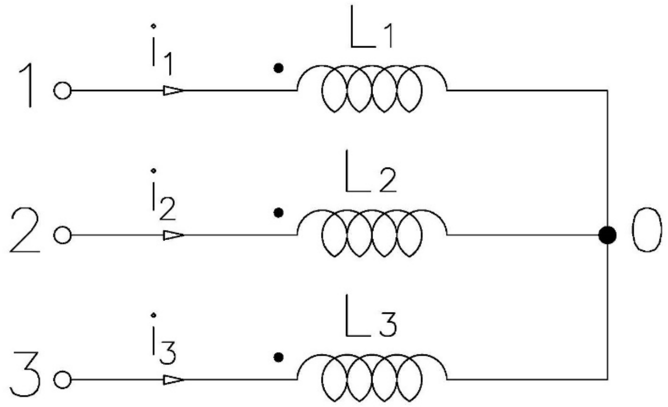

Figura 42

costituito da tre induttori di induttanza L_1, L_2 ed L_3, accoppiati mutuamente con coefficienti di mutua M_{12}, M_{23} ed M_{31}; i coefficienti di mutua, come ben sappiamo, sono affetti dal proprio segno.
Scriviamo le espressioni istantanee delle tensioni stellate:

$$
\begin{gathered}
v_{10} + e_{L1} + e_{M21} + e_{M31} = 0 \\
v_{20} + e_{L2} + e_{M12} + e_{M32} = 0 \\
v_{30} + e_{L3} + e_{M13} + e_{M23} = 0
\end{gathered}
$$

e considerando che con i versi assunti delle correnti, cioè tutte entranti dai morsetti contrassegnati con i pallini, le mutue sono positive, abbiamo:

$$
\begin{gathered}
v_{10} - L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{21} \frac{di_2}{dt} - M_{31} \frac{di_3}{dt} = 0 \\
v_{20} - L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt} - M_{32} \frac{di_3}{dt} = 0 \\
v_{30} - L_3 \frac{di_3}{dt} - M_{13} \frac{di_1}{dt} - M_{23} \frac{di_2}{dt} = 0
\end{gathered}
$$

cioè:

$$
\begin{gathered}
v_{10} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt} + M_{31} \frac{di_3}{dt} \\
v_{20} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} + M_{32} \frac{di_3}{dt} \\
v_{30} = L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{13} \frac{di_1}{dt} + M_{23} \frac{di_2}{dt}
\end{gathered}
$$

Ipotizziamo ora di essere a regime permanente sinusoidale e quindi le nostre equazioni diventano:

$$\dot{V}_{10} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M_{21}\dot{I}_2 + j\omega M_{31}\dot{I}_3$$
$$\dot{V}_{20} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M_{12}\dot{I}_1 + j\omega M_{32}\dot{I}_3$$
$$\dot{V}_{30} = j\omega L_3 \dot{I}_3 + j\omega M_{13}\dot{I}_1 + j\omega M_{23}\dot{I}_2$$

e queste equazioni sono identiche a quelle che scriveremmo se avessimo da analizzare il seguente sistema elettrico:

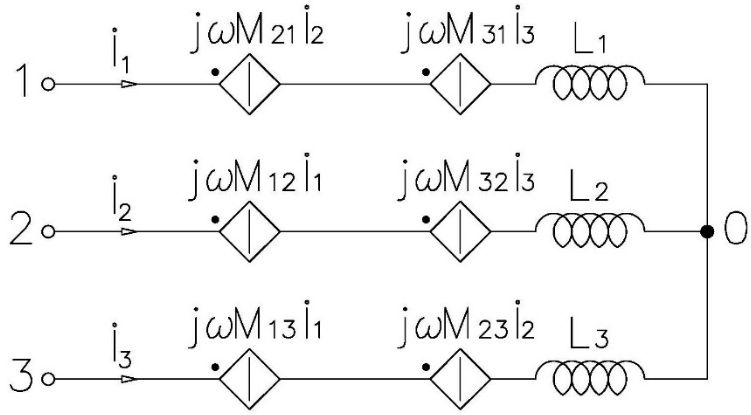

Figura 43

Infatti applicando la legge di Ohm generalizzata, otteniamo:

$$\dot{V}_{10} - j\omega M_{21}\dot{I}_2 - j\omega M_{31}\dot{I}_3 - j\omega L_1\dot{I}_1 = 0$$
$$\dot{V}_{20} - j\omega M_{12}\dot{I}_1 - j\omega M_{32}\dot{I}_3 - j\omega L_2\dot{I}_2 = 0$$
$$\dot{V}_{30} - j\omega M_{13}\dot{I}_1 - j\omega M_{23}\dot{I}_2 - j\omega L_3\dot{I}_3 = 0$$

da cui:

$$\dot{V}_{10} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M_{21}\dot{I}_2 + j\omega M_{31}\dot{I}_3$$
$$\dot{V}_{20} = j\omega M_{12}\dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M_{32}\dot{I}_3$$
$$\dot{V}_{30} = j\omega M_{13}\dot{I}_1 + j\omega M_{23}\dot{I}_2 + j\omega L_3 \dot{I}_3$$

e ponendo:

$$X_1 = \omega L_1 \quad X_2 = \omega L_2 \quad X_3 = \omega L_3$$

$$X_{12} = X_{21} = \omega M_{12} \quad X_{23} = X_{32} = \omega M_{23} \quad X_{31} = X_{13} = \omega M_{31}$$

abbiamo:

$$\dot{V}_{10} = jX_1\dot{I}_1 + jX_{12}\dot{I}_2 + jX_{31}\dot{I}_3$$
$$\dot{V}_{20} = jX_{12}\dot{I}_1 + jX_2\dot{I}_2 + jX_{23}\dot{I}_3$$
$$\dot{V}_{30} = jX_{31}\dot{I}_1 + jX_{23}\dot{I}_2 + jX_3\dot{I}_3$$

Quindi la figura 43 la possiamo ora ridisegnare nel seguente modo:

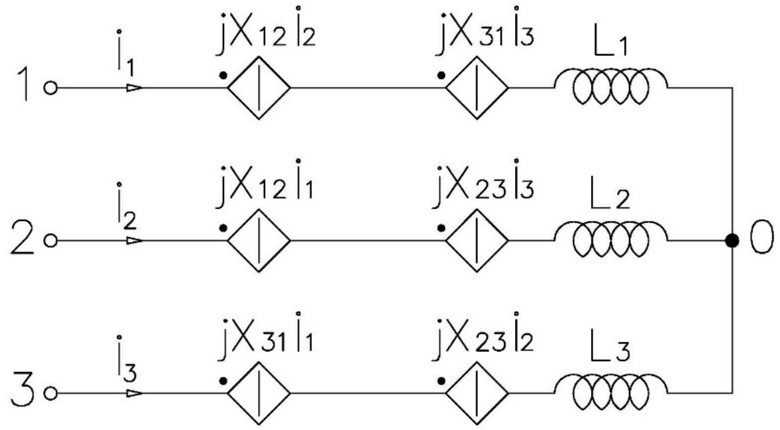

Figura 44 – Circuito equivalente con generatori controllati

Riferendoci al sistema equivalente di figura 44, calcoliamo le tensioni concatenate $\dot{V}_{12}$ e$\dot{V}_{23}$:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{12} = \dot{V}_{10} - \dot{V}_{20} &= jX_{12}\dot{I}_2 + jX_{31}\dot{I}_3 + jX_1\dot{I}_1 - \left(jX_{12}\dot{I}_1 + jX_{23}\dot{I}_3 + jX_2\dot{I}_2\right)\\ &= jX_{12}\dot{I}_2 + jX_{31}\dot{I}_3 + jX_1\dot{I}_1 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3 - jX_2\dot{I}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_{32} = \dot{V}_{30} - \dot{V}_{20} &= jX_{31}\dot{I}_1 + jX_{23}\dot{I}_2 + jX_3\dot{I}_3 - \left(jX_{12}\dot{I}_1 + jX_{23}\dot{I}_3 + jX_2\dot{I}_2\right)\\ &= jX_{31}\dot{I}_1 + jX_{23}\dot{I}_2 + jX_3\dot{I}_3 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3 - jX_2\dot{I}_2\end{aligned}$$

Considerando che il sistema è a tre conduttori, abbiamo:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$$

da cui:

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_3$$

e sostituendo otteniamo:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{12} &= jX_{12}\dot{I}_2 + jX_{31}\dot{I}_3 + jX_1\dot{I}_1 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3 - jX_2\dot{I}_2\\ &= jX_{12}\left(-\dot{I}_1 - \dot{I}_3\right) + jX_{31}\dot{I}_3 + jX_1\dot{I}_1 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3 - jX_2\left(-\dot{I}_1 - \dot{I}_3\right)\\ &= jX_1\dot{I}_1 + jX_2\dot{I}_1 - 2jX_{12}\dot{I}_1 + jX_2\dot{I}_3 + jX_{31}\dot{I}_3 - jX_{12}\dot{I}_3 - jX_{23}\dot{I}_3\\ &= j(X_1 + X_2 - 2X_{12})\dot{I}_1 + j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23})\dot{I}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_{32} &= jX_{31}\dot{I}_1 + jX_{23}\dot{I}_2 + jX_3\dot{I}_3 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3 - jX_2\dot{I}_2\\ &= jX_{31}\dot{I}_1 + jX_{23}\left(-\dot{I}_1 - \dot{I}_3\right) + jX_3\dot{I}_3 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3 - jX_2\left(-\dot{I}_1 - \dot{I}_3\right)\\ &= jX_2\dot{I}_1 + jX_{31}\dot{I}_1 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_1 + jX_2\dot{I}_3 + jX_3\dot{I}_3 - 2jX_{23}\dot{I}_3\\ &= j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23})\dot{I}_1 + j(X_2 + X_3 - 2X_{23})\dot{I}_3\end{aligned}$$

Cioè:

$$\dot{V}_{12} = j(X_1 + X_2 - 2X_{12})\dot{I}_1 + j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23})\dot{I}_3$$
$$\dot{V}_{32} = j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23})\dot{I}_1 + j(X_2 + X_3 - 2X_{23})\dot{I}_3$$

e ponendo

$$\bar{Z}_{11} = j(X_1 + X_2 - 2X_{12}) \qquad \bar{Z}_{12} = j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23})$$
$$\bar{Z}_{21} = j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23}) \qquad \bar{Z}_{22} = j(X_2 + X_3 - 2X_{23})$$

otteniamo

$$\dot{V}_{12} = \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_3$$
$$\dot{V}_{32} = \bar{Z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_3$$

che in forma matriciale è

$$\begin{vmatrix}\dot{V}_{12}\\ \dot{V}_{32}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12}\\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_3\end{vmatrix}$$

oppure

$$\begin{vmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12}\\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22}\end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix}\dot{V}_{12}\\ \dot{V}_{32}\end{vmatrix}$$

Ricordiamo come si inverte una matrice, sia data la matrice

$$A = \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$$

la sua inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix}cof(A, x_{11}) & cof(A, x_{12})\\ cof(A, x_{21}) & cof(A, x_{22})\end{vmatrix}^T$$

dove

$\det(A)$ indica il determinante della matrice A;
l'esponente T indica l'operazione di trasposizione righe/colonne;
la matrice $\begin{vmatrix}cof(A, x_{11}) & cof(A, x_{12})\\ cof(A, x_{21}) & cof(A, x_{22})\end{vmatrix}$ è la matrice dei cofattori (o dei complementi algebrici);

il cofattore in posizione i, j è definito come $cof(A, x_{ij}) = (-1)^{i+j}\det(minore(A, i, j))$
dove $minore(A, i, j)$ rappresenta il minore di A che si ottiene cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima;
il segno $(-1)^{i+j}$ varia nel seguente modo $\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}$ cioè è + se la somma degli indici è pari, negativo se è dispari

Quindi

$$\begin{vmatrix}\bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12}\\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22}\end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22}-\bar{Z}_{12}^2}\begin{vmatrix}\bar{Z}_{22} & -\bar{Z}_{21}\\ -\bar{Z}_{12} & \bar{Z}_{11}\end{vmatrix}^{T} = \frac{1}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22}-\bar{Z}_{12}^2}\begin{vmatrix}\bar{Z}_{22} & -\bar{Z}_{12}\\ -\bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{11}\end{vmatrix}$$

sappiamo inoltre che l'operatore inverso dell'impedenza è l'operatore ammettenza, per cui

$$\begin{vmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12}\\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22}\end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix}\dot{V}_{12}\\ \dot{V}_{32}\end{vmatrix} = \frac{1}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22}-\bar{Z}_{12}^2}\begin{vmatrix}\bar{Z}_{22} & -\bar{Z}_{12}\\ -\bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{11}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\dot{V}_{12}\\ \dot{V}_{32}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\dfrac{\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22}-\bar{Z}_{12}^2} & \dfrac{-\bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22}-\bar{Z}_{12}^2}\\ \dfrac{-\bar{Z}_{21}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22}-\bar{Z}_{12}^2} & \dfrac{\bar{Z}_{11}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22}-\bar{Z}_{12}^2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\dot{V}_{12}\\ \dot{V}_{32}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\bar{y}_{11} & \bar{y}_{12}\\ \bar{y}_{21} & \bar{y}_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\dot{V}_{12}\\ \dot{V}_{32}\end{vmatrix}$$

questa relazione ci ricorda la relazione cui si arriva applicando il metodo dei potenziali ai nodi prendendo come riferimento il nodo 2 (le tensioni sono infatti riferite entrambi al nodo 2).

Cerchiamo quindi di ricavare ora i valori delle ammettenze, collegate a triangolo, per disegnare il circuito equivalente seguente, figura 45:

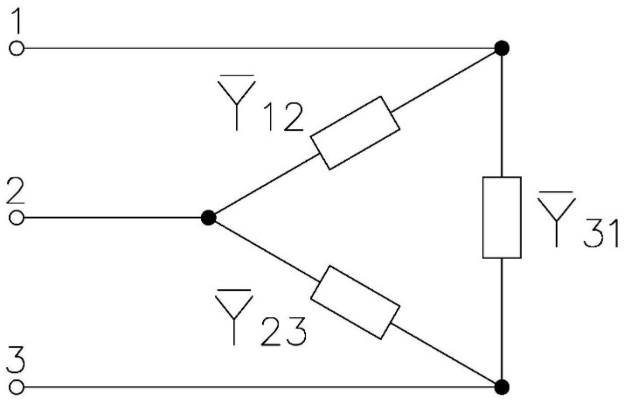

Figura 45 – Circuito equivalente a triangolo

Applichiamo il metodo dei potenziali ai nodi 1 e 3, prendendo come riferimento il nodo 2:

$$\dot{I}_1 = (\bar{Y}_{12}+\bar{Y}_{31})\dot{V}_{12} - \bar{Y}_{31}\dot{V}_{32}$$
$$\dot{I}_3 = -\bar{Y}_{31}\dot{V}_{12} + (\bar{Y}_{23}+\bar{Y}_{31})\dot{V}_{32}$$

e, in forma matriciale,

$$\begin{vmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\bar{y}_{11} & \bar{y}_{12}\\ \bar{y}_{21} & \bar{y}_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\dot{V}_{12}\\ \dot{V}_{32}\end{vmatrix}$$

dove abbiamo posto

$$\bar{y}_{11} = \bar{Y}_{12}+\bar{Y}_{31} \qquad \bar{y}_{12} = -\bar{Y}_{31}$$
$$\bar{y}_{21} = -\bar{Y}_{31} \qquad \bar{y}_{22} = \bar{Y}_{23}+\bar{Y}_{31}$$

da cui segue immediatamente che

$$\bar{y}_{11} = \bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{31} = \frac{\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}$$
$$\bar{y}_{12} = \bar{y}_{21} = -\bar{Y}_{31} = \frac{-\bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}$$
$$\bar{y}_{22} = \bar{Y}_{23} + \bar{Y}_{31} = \frac{\bar{Z}_{11}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}$$

e quindi

$$\bar{Y}_{12} = \frac{\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}$$
$$\bar{Y}_{23} = \frac{\bar{Z}_{11} - \bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}$$
$$\bar{Y}_{31} = \frac{\bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}$$

da queste si ricavano, ovviamente, le corrispettive impedenze collegate a triangolo

$$\bar{Z}_{12} = \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}}$$
$$\bar{Z}_{23} = \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{11} - \bar{Z}_{12}}$$
$$\bar{Z}_{31} = \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{12}}$$

e quindi, utilizzando le note formule stella-triangolo, otteniamo le impedenze equivalenti a stella

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}}$$
$$\bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}}$$
$$\bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_{23}\bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}}$$

ed il circuito equivalente di figura 46

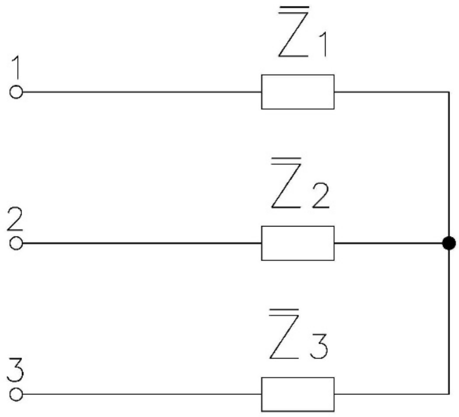

Figura 46 – Circuito equivalente a stella

Riepilogando abbiamo:

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \qquad \bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \qquad \bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_{23}\bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}}$$

$$\bar{Z}_{12} = \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}} \qquad \bar{Z}_{23} = \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{11} - \bar{Z}_{12}} \qquad \bar{Z}_{31} = \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{12}}$$

$$\bar{Z}_{11} = j(X_1 + X_2 - 2X_{12}) \qquad \bar{Z}_{12} = j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23})$$
$$\bar{Z}_{21} = j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23}) \qquad \bar{Z}_{22} = j(X_2 + X_3 - 2X_{23})$$

$$X_1 = \omega L_1 \qquad X_2 = \omega L_2 \qquad X_3 = \omega L_3$$
$$X_{12} = X_{21} = \omega M_{12} \qquad X_{23} = X_{32} = \omega M_{23} \qquad X_{31} = X_{13} = \omega M_{31}$$

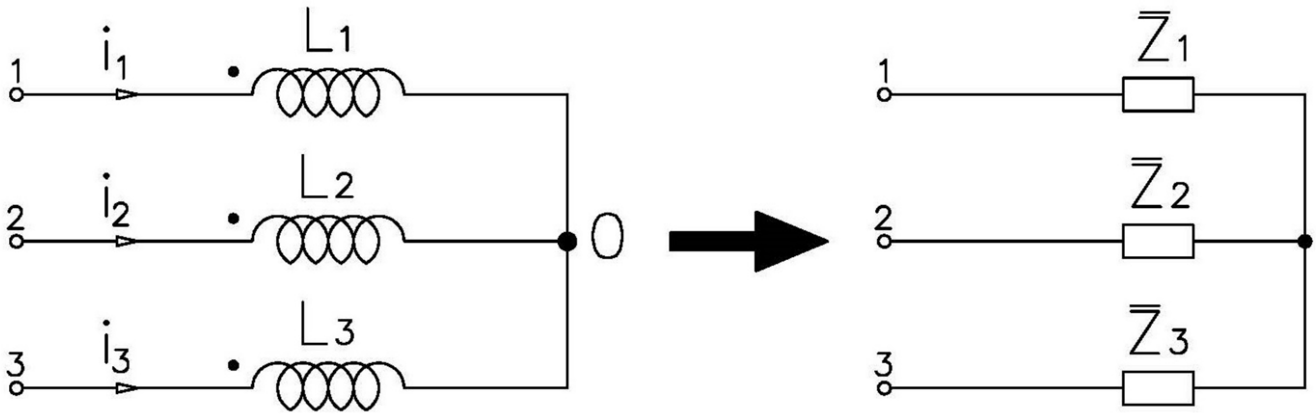

Figura 47 – Equivalenza complessiva

Caso particolare
Ipotizzando ora che sia le induttanze, sia le mutue, siano uguali tra loro, cioè:

$$L_1 = L_2 = L_3 = L \quad ed \quad M_{12} = M_{23} = M_{31} = M$$

avremo

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_L = \omega L \qquad\qquad X_{12} = X_{23} = X_{31} = X_M = \omega M$$

quindi

$$\bar{Z}_{11} = j(X_L + X_L - 2X_M) = 2j(X_L - X_M) \qquad\qquad \bar{Z}_{12} = j(X_L + X_M - X_M - X_M) = j(X_L - X_M)$$
$$\bar{Z}_{21} = j(X_L + X_M - X_M - X_M) = j(X_L - X_M) \qquad\qquad \bar{Z}_{22} = j(X_L + X_L - 2X_M) = 2j(X_L - X_M)$$

da cui

$$\bar{Z}_{11} = \bar{Z}_{22} = 2j(X_L - X_M) \qquad\qquad \bar{Z}_{21} = \bar{Z}_{12} = j(X_L - X_M)$$

inoltre

$$\bar{Z}_{12} = \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}} = \frac{2j(X_L - X_M)2j(X_L - X_M) - [j(X_L - X_M)]^2}{2j(X_L - X_M) - j(X_L - X_M)} = \frac{-4(X_L - X_M)^2 + (X_L - X_M)^2}{j(X_L - X_M)} = \frac{-3(X_L - X_M)^2}{j(X_L - X_M)}$$
$$= j3(X_L - X_M)$$

e, analogamente

$$\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{23} = \bar{Z}_{31} = \bar{Z}_\Delta = j3(X_L - X_M)$$

ed infine

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_\Delta^2}{3\bar{Z}_\Delta} = \frac{\bar{Z}_\Delta}{3} = j(X_L - X_M) = j\omega(L - M)$$

Verifica

Verifichiamo, per altra via, che queste relazioni siano valide in modo da avere anche la conferma della validità delle relazioni generali.

Scriviamo quindi le espressioni istantanee delle tensioni stellate, in questo caso, anche baricentriche e l'equazione al nodo 0, centro stella o baricentro:

$$\begin{cases} \dot V_{10} = j\omega L\dot I_1 + j\omega M\dot I_2 + j\omega M\dot I_3 \\ \dot V_{20} = j\omega L\dot I_2 + j\omega M\dot I_1 + j\omega M\dot I_3 \\ \dot V_{30} = j\omega L\dot I_3 + j\omega M\dot I_1 + j\omega M\dot I_2 \\ \dot I_1 + \dot I_2 + \dot I_3 = 0 \end{cases}$$

considerando che

$$\dot I_2 + \dot I_3 = -\dot I_1$$
$$\dot I_1 + \dot I_3 = -\dot I_2$$
$$\dot I_1 + \dot I_2 = -\dot I_3$$

si ha

$$\dot V_{10} = j\omega L\dot I_1 + j\omega M\dot I_2 + j\omega M\dot I_3 = j\omega L\dot I_1 - j\omega M\dot I_1 - j\omega M\dot I_3 + j\omega M\dot I_3 = j\omega(L-M)\dot I_1 = \bar Z_1\dot I_1$$
$$\dot V_{20} = j\omega L\dot I_2 + j\omega M\dot I_1 + j\omega M\dot I_3 = j\omega L\dot I_2 - j\omega M\dot I_2 - j\omega M\dot I_3 + j\omega M\dot I_3 = j\omega(L-M)\dot I_2 = \bar Z_2\dot I_2$$
$$\dot V_{30} = j\omega L\dot I_3 + j\omega M\dot I_1 + j\omega M\dot I_2 = j\omega L\dot I_3 + j\omega M\dot I_1 - j\omega M\dot I_1 - j\omega M\dot I_3 = j\omega(L-M)\dot I_3 = \bar Z_3\dot I_3$$

C.V.D.

Quindi

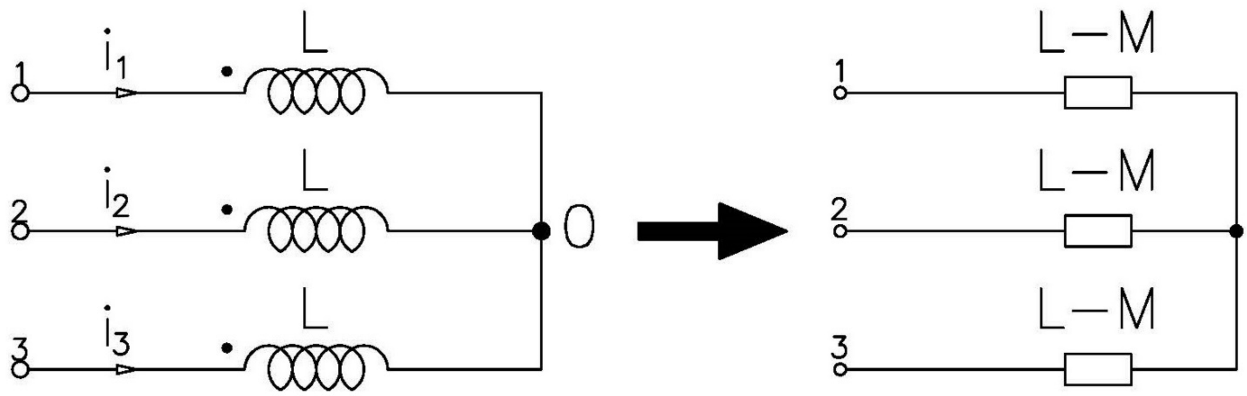

Figura 48 – Equivalenza complessiva carico equilibrato

Consideriamo adesso lo stesso circuito ma con l'aggiunta del conduttore neutro, figura 49

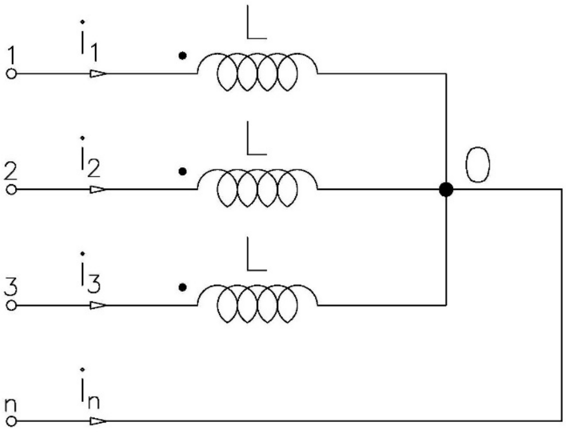

Figura 49 – Mutue con neutro

Le equazioni dell'equilibrio elettrico sono analoghe a quelle scritte prima con l'unica differenza che ora risulta

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_n = 0$$

quindi, con analoghe considerazioni abbiamo

$$\dot{V}_{10} = j\omega L\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_3 = j\omega L\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_3 - j\omega M\dot{I}_n + j\omega M\dot{I}_3 = j\omega(L-M)\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_n$$
$$\dot{V}_{20} = j\omega L\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_3 = j\omega L\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_3 - j\omega M\dot{I}_n + j\omega M\dot{I}_3 = j\omega(L-M)\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_n$$
$$\dot{V}_{30} = j\omega L\dot{I}_3 + j\omega M\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 = j\omega L\dot{I}_3 + j\omega M\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_3 - j\omega M\dot{I}_n = j\omega(L-M)\dot{I}_3 - j\omega M\dot{I}_n$$

da cui segue immediatamente il circuito equivalente di figura 50

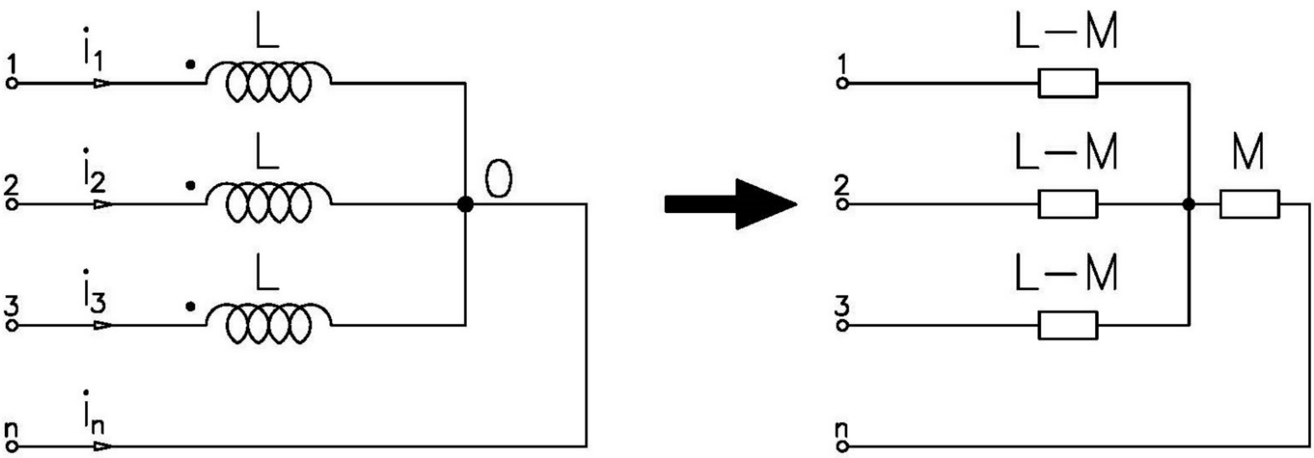

Figura 50 – Circuito equivalente con neutro