

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Sistemi Trifase

Capitolo 3 – Sistemi Dissimmetrici e Squilibrati

Anno Accademico 2022-2023

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:

Lezioni di Elettrotecnica Generale - Giulio Battistini

Colombo Corsi Pisa

M. Fauri “Electrical Systems Engineering” Lezione 9

3 Sistemi dissimmetrici e squilibrati

Un sistema trifase dissimmetrico e squilibrato è un sistema che tramite tre tensioni che hanno in comune solo la frequenza alimenta un carico costituito da tre impedenze diverse tra loro (figura 16).

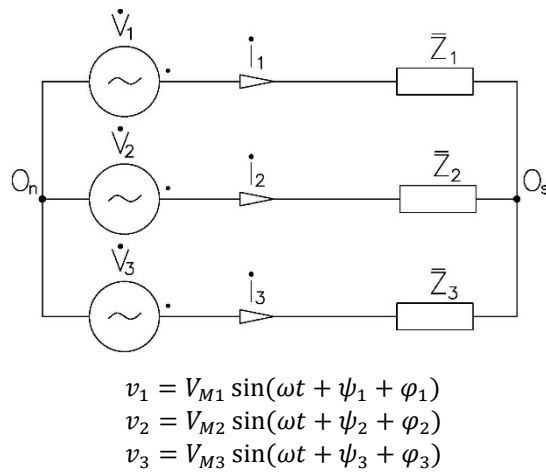
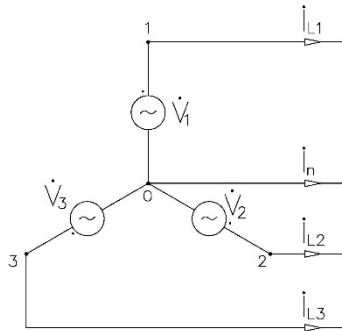


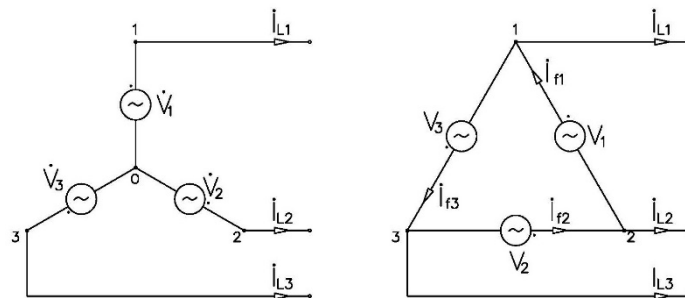
Figura 16

Molte reti di distribuzione in BT hanno una configurazione formata da un sistema generatore connesso a stella (figura 17a), il quale alimenta i vari carichi mediante una linea di collegamento costituita da quattro conduttori, tre partono dai morsetti delle fasi ed il quarto dal centro stella (morsetto del neutro). Questa configurazione caratterizza il sistema che chiameremo *sistema trifase a quattro fili*.



$$i_{L1} + i_{L2} + i_{L3} + i_n = 0$$

a) Sistema a quattro fili



$$i_{L1} + i_{L2} + i_{L3} = 0$$

$$i_{L1} + i_{L2} + i_{L3} = (i_{f1} - i_{f3}) + (i_{f2} - i_{f1}) + (i_{f3} - i_{f2}) = 0$$

b) Sistema a tre fili

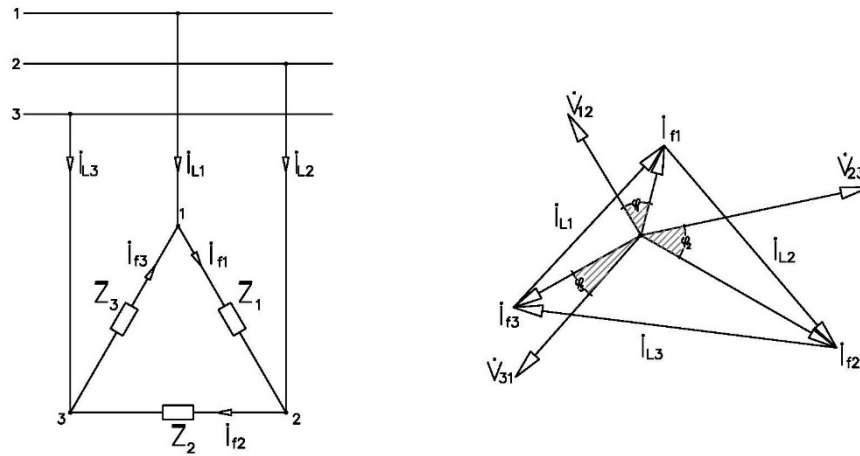
Figura 17

A differenza delle reti di distribuzione prima citate, le grandi condutture trifase per il trasporto dell'energia sono usualmente costituite dai soli conduttori che hanno origine dai tre morsetti delle fasi. La loro configurazione, quindi, è quella di un sistema con generatore connesso a triangolo, oppure a stella, ma il morsetto del neutro non ha collegamento con le utenze (figura 17b). Il sistema avente tale configurazione è detto *sistema trifase a tre fili*.

Nei sistemi a tre fili, come si rileva dalla figura, la somma delle correnti di linea è sempre nulla; e poiché abbiamo già visto che anche la somma delle tre tensioni di linea è in ogni caso identicamente uguale a zero, concludiamo che *nei sistemi trifase dissimmetrici e squilibrati a tre fili, le terne delle grandezze di linea sono sempre pure*.

3.1 Tensioni e correnti nei sistemi trifase a tre fili

Nei sistemi trifase dissimmetrici e squilibrati, il tipo di carico per il quale il calcolo delle grandezze si esegue con maggiore facilità, è quello con le fasi del carico connesse a triangolo (figura 18).



$$\begin{aligned} i_{l1} + i_{l2} + i_{l3} &= 0 \\ \dot{V}_{12} + \dot{V}_{23} + \dot{V}_{31} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{f1} &= \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} \\ i_{f2} &= \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} \\ i_{f3} &= \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{l1} &= i_{f1} - i_{f3} = \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} - \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} \\ i_{l2} &= i_{f2} - i_{f1} = \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} - \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} \\ i_{l3} &= i_{f3} - i_{f2} = \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} - \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} \end{aligned}$$

Figura 18

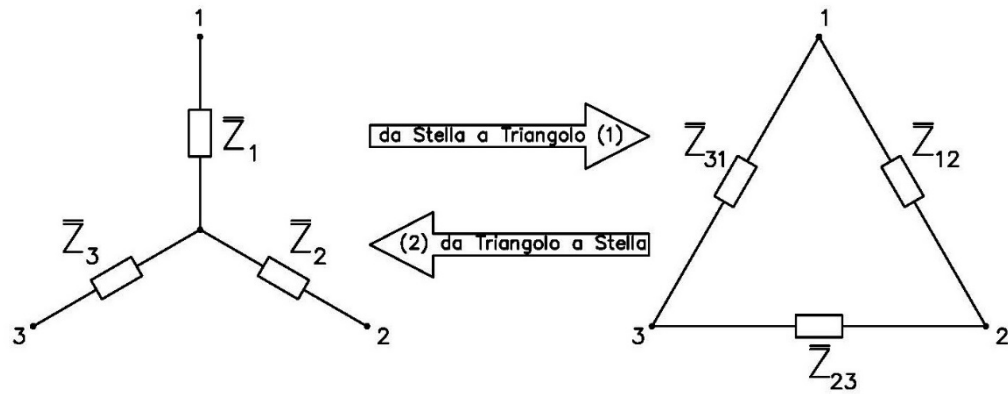
Infatti, note le tensioni concatenate della linea $\dot{V}_{12}, \dot{V}_{23}, \dot{V}_{31}$, si calcolano immediatamente le correnti nelle fasi del carico.

$$\begin{aligned} i_{f1} &= \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} = \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} e^{-j\varphi_1} \\ i_{f2} &= \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} = \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} e^{-j\varphi_2} \\ i_{f3} &= \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} = \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} e^{-j\varphi_3} \end{aligned}$$

dove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono gli angoli caratteristici delle impedenze del carico. Sottraendo poi a due a due queste correnti, si ottengono le correnti di linea:

$$\begin{aligned} i_{l1} &= i_{f1} - i_{f3} = \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} - \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} \\ i_{l2} &= i_{f2} - i_{f1} = \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} - \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} \\ i_{l3} &= i_{f3} - i_{f2} = \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} - \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} \end{aligned}$$

Se invece il carico è connesso a stella, il calcolo oltre che con i metodi classici (per esempio Millmann e Kirchhoff) si può ricondurre al caso precedente sostituendo alla stella del carico, il triangolo equivalente tramite le note formule (figura 19).



$$\begin{aligned}\bar{Z}_{12} &= \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_p} \\ \bar{Z}_{23} &= \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_p} \\ \bar{Z}_{31} &= \frac{\bar{Z}_3 \bar{Z}_1}{\bar{Z}_p}\end{aligned}\quad \bar{Z}_p = \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\bar{Z}_1 &= \frac{\bar{Z}_{12} \bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_s} \\ \bar{Z}_2 &= \frac{\bar{Z}_{12} \bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_s} \\ \bar{Z}_3 &= \frac{\bar{Z}_{23} \bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_s}\end{aligned}\quad \bar{Z}_s = \bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31} \quad (2)$$

Figura 19

Fatta quindi l'equivalenza stella triangolo, si calcolano le correnti di fase del triangolo:

$$\begin{aligned}i_{12} &= \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_{12}} \\ i_{23} &= \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_{23}} \\ i_{31} &= \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_{31}}\end{aligned}$$

E facendo la differenza a due a due fra queste correnti, si ricavano le correnti di linea che, poi, altro non sono che le correnti di fase dell'originario carico a stella:

$$\begin{aligned}i_{l1} = i_{f1} = i_{12} - i_{31} &= \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_{12}} - \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_{31}} \\ i_{l2} = i_{f2} = i_{23} - i_{12} &= \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_{23}} - \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_{12}} \\ i_{l3} = i_{f3} = i_{31} - i_{23} &= \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_{31}} - \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_{23}}\end{aligned}$$

3.2 I centri stella nei sistemi trifase dissimmetrici e squilibrati

Data una linea trifase ed il relativo sistema di tensioni concatenate $\dot{V}_{12}, \dot{V}_{23}, \dot{V}_{31}$, chiameremo genericamente **centro stella** O_s , il punto di connessione di una qualunque stella di tre impedenze $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$, scelte arbitrariamente e collegate ai conduttori di linea (figura 20).

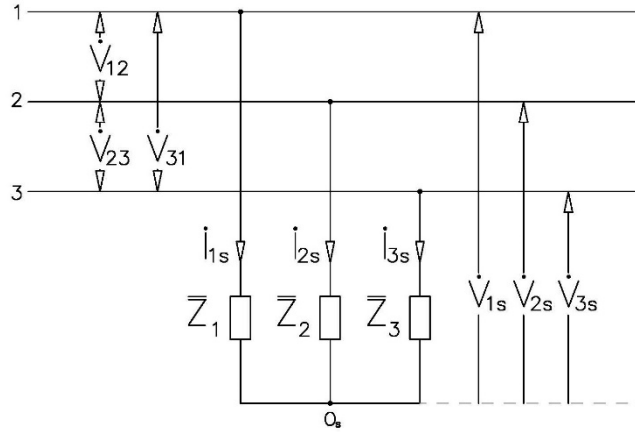


Figura 20

E' chiaro che per un determinato sistema trifase di tensioni concatenate possono costruirsi infiniti centri stella variando ad arbitrio le impedenze della stella. Quando le tre impedenze $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$ e $\bar{Z}_3$ sono uguali fra loro, il relativo centro stella, come già visto, si dice **baricentro elettrico** (O_b) del sistema trifase.

Chiameremo poi **terna di tensioni stellate** ($\dot{V}_{1s}, \dot{V}_{2s}, \dot{V}_{3s}$), rispetto ad un determinato centro stella (O_s), le tensioni fra ciascun conduttore di linea ed O_s . Quando il centro stella prescelto è il baricentro del sistema, le tensioni stellate, come già detto, si dicono **baricentriche** ($\dot{V}_{1b}, \dot{V}_{2b}, \dot{V}_{3b}$).

È facile rilevare che ogni tensione di linea o concatenata, risulta uguale alla differenza fra due successive tensioni stellate di ogni terna. Pertanto, qualunque sia il centro stella prescelto, le tensioni stellate sono legate alle tensioni concatenate dalle relazioni:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{12} &= \dot{V}_{1s} - \dot{V}_{2s} \\ \dot{V}_{23} &= \dot{V}_{2s} - \dot{V}_{3s} \\ \dot{V}_{31} &= \dot{V}_{3s} - \dot{V}_{1s}\end{aligned}$$

Tutte le terne di tensioni stellate derivate da una stessa linea, se questa è *prevalente*, hanno in comune fra loro la stessa terna di tensioni concatenate $\dot{V}_{12}, \dot{V}_{23}, \dot{V}_{31}$. Perciò le differenze omologhe fra due consecutive tensioni stellate, essendo uguali alla stessa tensione di linea, sono uguali in tutte le terne:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{12} &= \dot{V}_{1s'} - \dot{V}_{2s'} = \dot{V}_{1s''} - \dot{V}_{2s''} = \dots \\ \dot{V}_{23} &= \dot{V}_{2s'} - \dot{V}_{3s'} = \dot{V}_{2s''} - \dot{V}_{3s''} = \dots \\ \dot{V}_{31} &= \dot{V}_{3s'} - \dot{V}_{1s'} = \dot{V}_{3s''} - \dot{V}_{1s''} = \dots\end{aligned}$$

Quindi se nella rappresentazione polare delle tensioni (figura 21) si disegna innanzitutto il triangolo delle tre tensioni di linea ($\dot{V}_{12}, \dot{V}_{23}, \dot{V}_{31}$) e si riportano poi nel diagramma i vettori delle varie terne stellate con l'origine in altrettanti diversi poli, in modo che gli estremi dei vettori $\dot{V}_{1s}, \dot{V}_{2s}$ e $\dot{V}_{3s}$ coincidano in ogni caso con i corrispondenti vertici del triangolo disegnato, tutte le terne di tensioni stellate derivate dalla linea risultano rappresentate da **stelle di vettori a vertici comuni**.

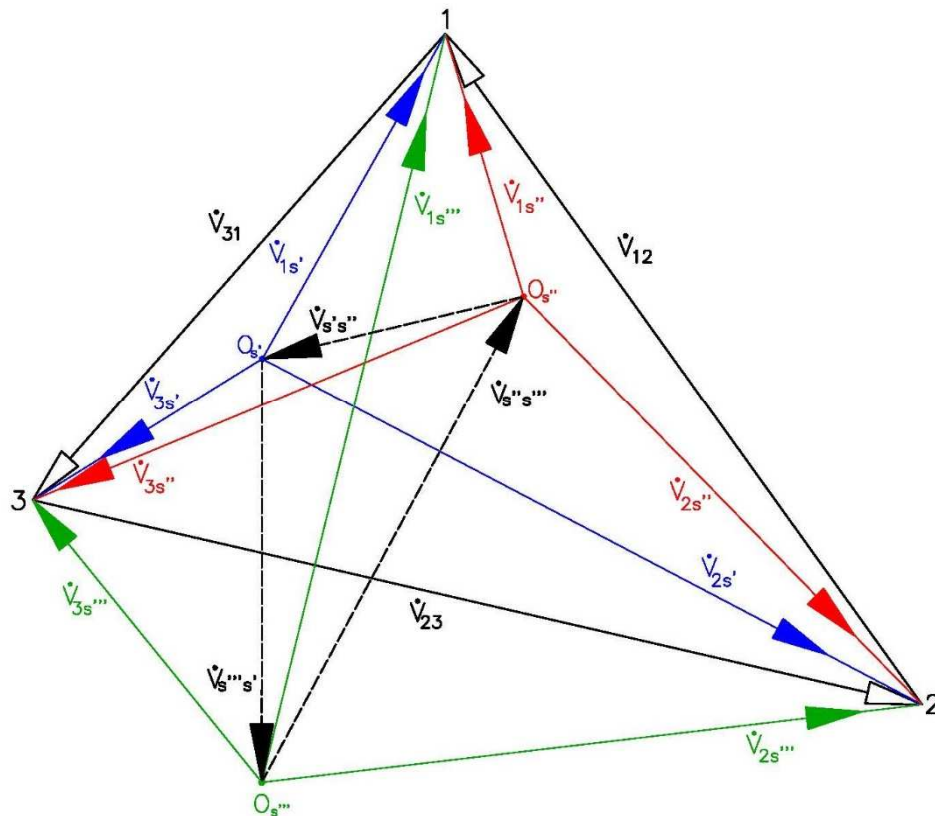


Figura 21

È chiaro allora che i poli delle varie terne corrispondono ai relativi centri stella e che la tensione fra due qualsiasi centri stella del sistema è rappresentata dal vettore congiungente i due poli corrispondenti.

Tra le infinite terne di tensioni stellate relative ad un determinato sistema trifase, si distingue, per alcune importanti proprietà caratteristiche, la terna delle tensioni baricentriche.

Consideriamo il baricentro O_b ottenuto derivando dalla linea tre impedenze uguali $\bar{Z}$ (figura 22). Indicando con $\dot{I}_{1b}, \dot{I}_{2b}, \dot{I}_{3b}$, le correnti che percorrono tali impedenze (la loro somma per l'equazione al nodo O_b è nulla), si ha:

$$\dot{V}_{1b} + \dot{V}_{2b} + \dot{V}_{3b} = \bar{Z}(\dot{I}_{1b} + \dot{I}_{2b} + \dot{I}_{3b}) = 0$$

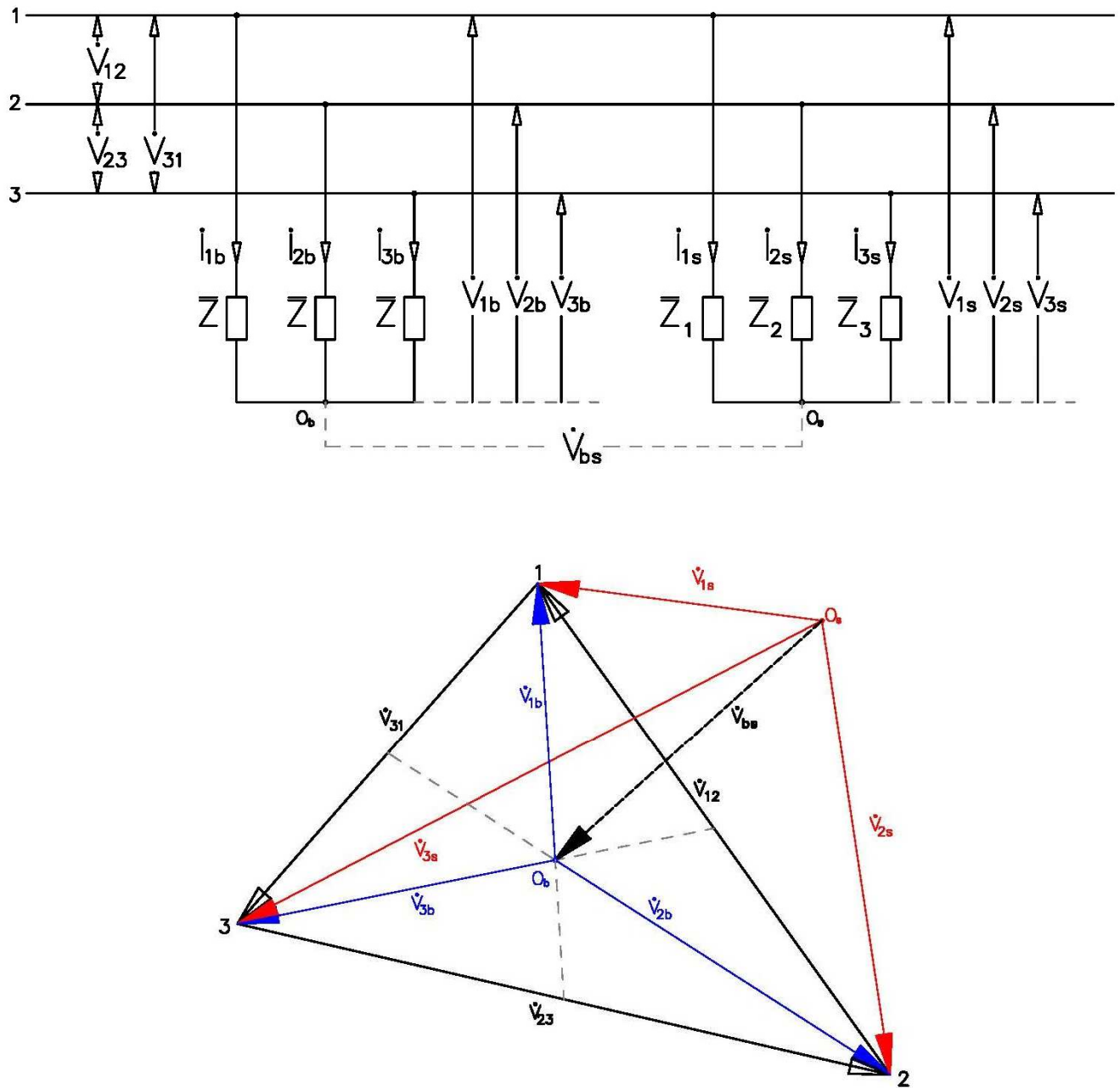


Figura 22

Vale a dire che la *terna delle tensioni baricentriche è sempre pura*. È evidente inoltre che il punto O_b coincide con il baricentro geometrico del triangolo i cui lati rappresentano le tensioni di linea.

La differenza di potenziale esistente tra il baricentro O_b del sistema ed un qualunque centro stella O_s è rappresentata nel diagramma polare della figura 22 dal vettore $\dot{V}_{bs}$ che unisce O_s con O_b . L'espressione simbolica si deduce dalle relazioni:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{bs} + \dot{V}_{1b} &= \dot{V}_{1s} \\ \dot{V}_{bs} + \dot{V}_{2b} &= \dot{V}_{2s} \\ \dot{V}_{bs} + \dot{V}_{3b} &= \dot{V}_{3s}\end{aligned}$$

Infatti, sommandole membro a membro e ricordando che la terna baricentrica è pura, si ottiene:

$$\dot{V}_{bs} = \frac{\dot{V}_{1s} + \dot{V}_{2s} + \dot{V}_{3s}}{3}$$

Vale a dire, la tensione $\dot{V}_{bs}$ fra il baricentro del sistema ed un centro stella generico O_s è espressa, in termini simbolici, dalla media aritmetica delle tre tensioni stellate rispetto ad O_s .

Questa tensione può, evidentemente, essere espressa anche in funzione delle tensioni baricentriche e delle ammettenze $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2$ e $\bar{Y}_3$ del carico, infatti scrivendo l'equazione al nodo O_s (figura 23):

$$\dot{I}_{1s} + \dot{I}_{2s} + \dot{I}_{3s} = 0$$

Essendo:

$$\begin{aligned}\dot{I}_{1s} &= \dot{V}_{1s} \bar{Y}_1 \\ \dot{I}_{2s} &= \dot{V}_{2s} \bar{Y}_2 \\ \dot{I}_{3s} &= \dot{V}_{3s} \bar{Y}_3\end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\dot{V}_{1s} \bar{Y}_1 + \dot{V}_{2s} \bar{Y}_2 + \dot{V}_{3s} \bar{Y}_3 &= 0 \\ (\dot{V}_{bs} + \dot{V}_{1b}) \bar{Y}_1 + (\dot{V}_{bs} + \dot{V}_{2b}) \bar{Y}_2 + (\dot{V}_{bs} + \dot{V}_{3b}) \bar{Y}_3 &= 0 \\ \dot{V}_{1b} \bar{Y}_1 + \dot{V}_{2b} \bar{Y}_2 + \dot{V}_{3b} \bar{Y}_3 + \dot{V}_{bs} (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3) &= 0 \\ \dot{V}_{bs} &= - \frac{\dot{V}_{1b} \bar{Y}_1 + \dot{V}_{2b} \bar{Y}_2 + \dot{V}_{3b} \bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3} \\ \dot{V}_{sb} &= \frac{\dot{V}_{1b} \bar{Y}_1 + \dot{V}_{2b} \bar{Y}_2 + \dot{V}_{3b} \bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3}\end{aligned}$$

La formula:

$$\dot{V}_{bs} = \frac{\dot{V}_{1s} + \dot{V}_{2s} + \dot{V}_{3s}}{3}$$

consente di stabilire delle semplici relazioni tramite le quali si possono esprimere le *tensioni stellate baricentriche in funzione delle tensioni di linea*. Supponiamo, essendo il centro stella O_s arbitrario, di far coincidere O_s con il vertice 1 del triangolo di figura 22. Le tensioni stellate rispetto a tale centro stella saranno:

$$\dot{V}_{1s}^{(1)} = 0$$

$$\dot{V}_{2s}^{(1)} = -\dot{V}_{12}$$

$$\dot{V}_{3s}^{(1)} = \dot{V}_{31}$$

sostituendo otteniamo

$$\dot{V}_{bs}^{(1)} = \frac{\dot{V}_{1s}^{(1)} + \dot{V}_{2s}^{(1)} + \dot{V}_{3s}^{(1)}}{3} = \frac{-\dot{V}_{12} + \dot{V}_{31}}{3}$$

e poiché $\dot{V}_{bs}^{(1)}$ non è altro che l'opposto della tensione stellata baricentrica $\dot{V}_{1b}$, si ha:

$$\dot{V}_{bs}^{(1)} = \frac{-\dot{V}_{12} + \dot{V}_{31}}{3} = -\dot{V}_{1b}$$

ed infine

$$\dot{V}_{1b} = \frac{\dot{V}_{12} - \dot{V}_{31}}{3}$$

Banalmente, con analogo procedimento, è cioè facendo coincidere O_s con i vertici 2 e 3 del triangolo delle tensioni di linea, otteniamo:

$$\dot{V}_{2b} = \frac{\dot{V}_{23} - \dot{V}_{12}}{3}$$

$$\dot{V}_{3b} = \frac{\dot{V}_{31} - \dot{V}_{23}}{3}$$

3.3 Potenza nei sistemi dissimmetrici e squilibrati

Dato un sistema trifase dissimmetrico e squilibrato, a tre o quattro fili, l'andamento degli scambi energetici, può rilevarsi dall'esame della variazione nel tempo delle potenze istantanee, p_1 , p_2 , p_3 , erogate dai tre generatori (o assorbite dalle tre fasi del carico). La **potenza trifase istantanea** che il sistema trasmette alla linea (o che il carico assorbe dalla linea), è data dalla somma delle tre potenze istantanee.

Date quindi le correnti e le tensioni relative alle singole fasi:

$$\begin{aligned} v_1 &= V_{M1} \sin(\omega t + \psi_1 + \phi_1) & i_1 &= I_{M1} \sin(\omega t + \psi_1) \\ v_2 &= V_{M2} \sin(\omega t + \psi_2 + \phi_2) & i_2 &= I_{M2} \sin(\omega t + \psi_2) \\ v_3 &= V_{M3} \sin(\omega t + \psi_3 + \phi_3) & i_3 &= I_{M3} \sin(\omega t + \psi_3) \end{aligned}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 = \\ &= V_1 I_1 \cos \phi_1 - V_1 I_1 \cos(2\omega t + 2\psi_1 + \phi_1) + \\ &\quad + V_2 I_2 \cos \phi_2 - V_2 I_2 \cos(2\omega t + 2\psi_2 + \phi_2) + \\ &\quad + V_3 I_3 \cos \phi_3 - V_3 I_3 \cos(2\omega t + 2\psi_3 + \phi_3) \end{aligned}$$

La potenza istantanea è quindi, come ben noto, costituita da due addendi, il primo costante (**Potenza Costante**):

$$p_c = V_1 I_1 \cos \phi_1 + V_2 I_2 \cos \phi_2 + V_3 I_3 \cos \phi_3$$

ed il secondo variabile (**Potenza Fluttuante**):

$$\begin{aligned} p_{fl} &= -[V_1 I_1 \cos(2\omega t + 2\psi_1 + \phi_1) + V_2 I_2 \cos(2\omega t + 2\psi_2 + \phi_2) + V_3 I_3 \cos(2\omega t + 2\psi_3 + \phi_3)] = \\ &= V_1 I_1 \sin\left(2\omega t + 2\psi_1 + \phi_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \\ &\quad + V_2 I_2 \sin\left(2\omega t + 2\psi_2 + \phi_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \\ &\quad + V_3 I_3 \sin\left(2\omega t + 2\psi_3 + \phi_3 - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

La potenza fluttuante è quindi costituita dalla somma delle potenze fluttuanti messe in gioco da ciascuna fase.

Diversamente da quanto avviene nei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati, dove abbiamo visto che la potenza fluttuante trifase è nulla, in questi sistemi la stessa è presente e costituisce un peculiare carattere distintivo del regime dissimmetrico e squilibrato.

Generalizzando ora le definizioni già note, diremo **Potenza Attiva Trifase P** e **Potenza Reattiva Trifase Q** di un sistema dissimmetrico e squilibrato la somma delle potenze attive e delle potenze reattive delle tre fasi:

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + P_3 = V_1 I_1 \cos \phi_1 + V_2 I_2 \cos \phi_2 + V_3 I_3 \cos \phi_3 \\ Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = V_1 I_1 \sin \phi_1 + V_2 I_2 \sin \phi_2 + V_3 I_3 \sin \phi_3 \end{aligned}$$

La potenza attiva trifase, come noto, è sempre il valor medio della potenza istantanea, mentre in questi sistemi la potenza reattiva trifase non ha alcun significato fisico.

Definiamo poi, come per gli altri sistemi, **Potenza Apparente Trifase S** e **Potenza Complessa Trifase $\bar{S}$** , rispettivamente:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = \dot{V}_1 \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_2 \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_3 \cdot \dot{I}_3 = V_1 I_1 e^{j\phi_1} + V_2 I_2 e^{j\phi_2} + V_3 I_3 e^{j\phi_3} = P_1 + jQ_1 + P_2 + jQ_2 + P_3 + jQ_3$$

Nei sistemi trifase dissimmetrici e squilibrati non è più possibile definire il fattore di potenza in funzione degli angoli caratteristici del carico. Utilizzando quindi la definizione generale, abbiamo:

$$f.d.p. = \frac{P}{S}$$

Se vogliamo comunque utilizzare, per comodità, un coseno, possiamo affermare che *il fattore di potenza coincide con il coseno dell'angolo di cui va ruotata la stella delle correnti rispetto a quella delle tensioni o viceversa affinché l'espressione della potenza attiva risulti massima.*

3.4 Teorema di Aron

Consideriamo un sistema a *tre fili* dissimmetrico e squilibrato e costruiamo un qualsiasi centro stella O_s (figura 23);

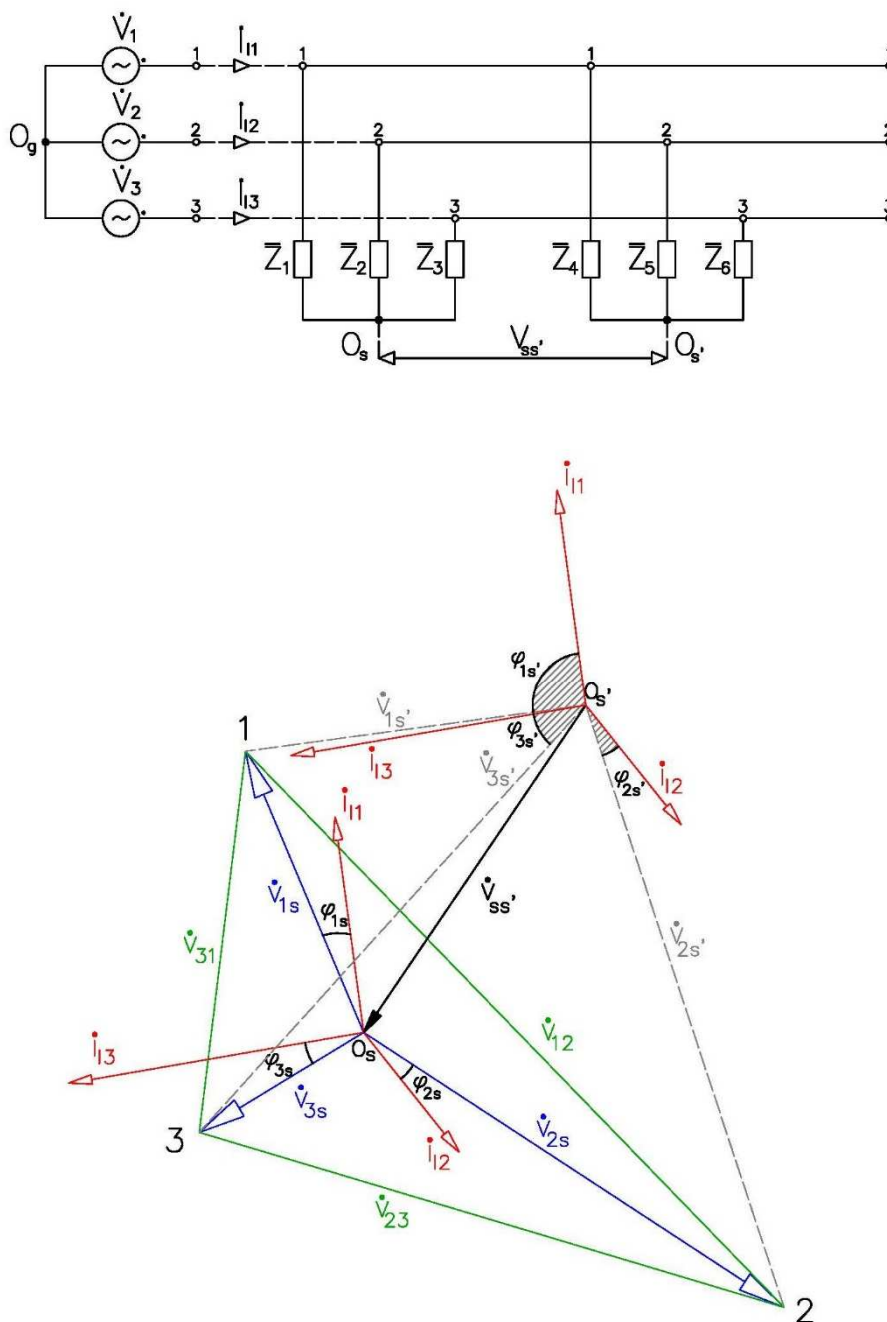


Figura 23 – Teorema di Aron

Si rileva che l'espressione (potenza attiva, rispetto ad O_s):

$$P(O_s) = V_{1s} I_{l1} \cos \varphi_{1s} + V_{2s} I_{l2} \cos \varphi_{2s} + V_{3s} I_{l3} \cos \varphi_{3s} = \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{l3}$$

è invariante rispetto al centro stella, non varia cioè di valore qualsiasi sia il centro stella scelto.

Supponiamo di costruire ora un altro centro stella qualsiasi $O_{s'}$ ed indichiamo con $\dot{V}_{ss'}$ la tensione tra i due centri stella, avremo:

$$\begin{aligned} P(O_{s'}) &= \dot{V}_{1s'} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s'} \cdot \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s'} \cdot \dot{I}_{l3} = (\dot{V}_{ss'} + \dot{V}_{1s}) \cdot \dot{I}_{l1} + (\dot{V}_{ss'} + \dot{V}_{2s}) \cdot \dot{I}_{l2} + (\dot{V}_{ss'} + \dot{V}_{3s}) \cdot \dot{I}_{l3} \\ &= \dot{V}_{ss'} \cdot (\dot{I}_{l1} + \dot{I}_{l2} + \dot{I}_{l3}) + \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{l3} \end{aligned}$$

Ed essendo la terna delle correnti una terna pura, cioè la somma delle correnti è zero, si ha:

$$P(O_{s'}) = \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{l3} = P(O_s)$$

L'invarianza vale anche, ovviamente, per i centri stella O_g od O_c dei generatori o del carico (se connessi a stella); perciò indicando con P la potenza attiva trifase del sistema, si ha:

$$P(O_{s'}) = \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{l3} = P$$

Quindi possiamo terminare affermando che *la potenza attiva trifase di un sistema trifase a tre fili qualsiasi è uguale alla somma dei prodotti scalari delle correnti di linea per le corrispondenti tensioni stellate relative ad un qualunque centro stella scelto ad arbitrio (Teorema di Aron).*

Il teorema, dimostrato nel caso di generatori o carichi supposti a stella, è valido anche nel caso in cui siano connessi a triangolo. La potenza trifase, infatti, erogata dal generatore (o assorbita dal carico) a triangolo è uguale a quella erogata dal generatore (o assorbita dal carico) a stella ad esso equivalente. Consideriamo un generatore (o un carico) connesso a triangolo ed immaginiamo di sostituire ad esso il suo equivalente a stella, sapendo che:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1\Delta} &= \dot{V}_{1\lambda} - \dot{V}_{2\lambda} & \dot{I}_{1\lambda} &= \dot{I}_1 - \dot{I}_3 \\ \dot{V}_{2\Delta} &= \dot{V}_{2\lambda} - \dot{V}_{3\lambda} & \dot{I}_{2\lambda} &= \dot{I}_2 - \dot{I}_1 \\ \dot{V}_{3\Delta} &= \dot{V}_{3\lambda} - \dot{V}_{1\lambda} & \dot{I}_{3\lambda} &= \dot{I}_3 - \dot{I}_2 \end{aligned}$$

avremo:

$$\begin{aligned} P_{\Delta} &= \dot{V}_{1\Delta} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{2\Delta} \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{3\Delta} \cdot \dot{I}_3 = (\dot{V}_{1\lambda} - \dot{V}_{2\lambda}) \cdot \dot{I}_1 + (\dot{V}_{2\lambda} - \dot{V}_{3\lambda}) \cdot \dot{I}_2 + (\dot{V}_{3\lambda} - \dot{V}_{1\lambda}) \cdot \dot{I}_3 = \\ &= \dot{V}_{1\lambda} \cdot (\dot{I}_1 - \dot{I}_3) + \dot{V}_{2\lambda} \cdot (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) + \dot{V}_{3\lambda} \cdot (\dot{I}_3 - \dot{I}_2) = \dot{V}_{1\lambda} \cdot \dot{I}_{1\lambda} + \dot{V}_{2\lambda} \cdot \dot{I}_{2\lambda} + \dot{V}_{3\lambda} \cdot \dot{I}_{3\lambda} = P_{\lambda} \end{aligned}$$

Analogamente può dimostrarsi per la potenza reattiva trifase quando, al posto dei prodotti scalari, si sostituiscono i prodotti vettoriali. Pertanto qualunque sia il centro stella al quale è riferita la terna delle tensioni stellate, si ha:

$$Q = \dot{V}_{1s} \wedge \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \wedge \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s} \wedge \dot{I}_{l3}$$

Il teorema di Aron indica, quindi, come possono esprimersi le potenze di un sistema trifase dissimmetrico e squilibrato a tre fili, in funzione delle sole grandezze di linea, indipendentemente dal generatore e dal carico.

Riprendendo, infatti, l'espressione generale della potenza attiva trifase:

$$P = \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{l3}$$

scrivendo l'equazione al nodo (centro stella) per il sistema a tre fili:

$$\dot{I}_{l1} + \dot{I}_{l2} + \dot{I}_{l3} = 0$$

e ricavando da quest'ultima, per esempio, $\dot{I}_{l2} = -\dot{I}_{l1} - \dot{I}_{l3}$ e sostituendola, si ha:

$$\begin{aligned} P &= \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \cdot (-\dot{I}_{l1} - \dot{I}_{l3}) + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{l3} = (\dot{V}_{1s} - \dot{V}_{2s}) \cdot \dot{I}_{l1} - (\dot{V}_{2s} - \dot{V}_{3s}) \cdot \dot{I}_{l3} = \dot{V}_{12} \cdot \dot{I}_{l1} - \dot{V}_{23} \cdot \dot{I}_{l3} \\ &= \dot{V}_{12} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{32} \cdot \dot{I}_{l3} \end{aligned}$$

ed analogamente per la potenza reattiva trifase.

In conclusione:

$$P = \dot{V}_{12} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{32} \cdot \dot{I}_{l3}$$

$$Q = \dot{V}_{12} \wedge \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{32} \wedge \dot{I}_{l3}$$