UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Sistemi Trifase

Capitolo 2 - Sistemi Simmetrici ed Equilibrati

Anno Accademico 2022-2023

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:
Lezioni di Elettrotecnica Generale *- Giulio Battistini*
Colombo Cursi Pisa
M. Fauri *"Electrical Systems Engineering" Lezione 9*

2 Sistemi simmetrici ed equilibrati

Riassumendo, si rileva che *quando la regolarità della stella dei vettori rappresentativi è attribuita alle tensioni (qualunque sia il loro collegamento interfasico) il sistema trifase si dice* ***simmetrico****; quando invece è attribuita alle correnti, il sistema si dice* ***equilibrato****. Si dicono inoltre equilibrati quei carichi trifase che (qualunque sia la loro interconnessione) hanno uguale impedenza in tutte le fasi*.

Pertanto possiamo avere quattro tipi diversi di sistemi trifase:

- Sistemi ***simmetrici ed equilibrati***, nei quali si ha la simmetria delle tensioni e l'equilibrio nelle correnti. Essi si realizzano alimentando un carico trifase equilibrato mediante un sistema simmetrico di tensioni.

- Sistemi ***simmetrici e squilibrati***, nei quali si ha la simmetria delle tensioni ma non l'equilibrio nelle correnti. Essi si realizzano alimentando un carico trifase squilibrato mediante un sistema simmetrico di tensioni.

- Sistemi ***dissimmetrici ed equilibrati***, nei quali non si ha la simmetria delle tensioni ma l'equilibrio nelle correnti. Essi si realizzano in casi molto particolari, infatti le impedenze del carico devono avere proprio quei particolari valori per i quali le correnti prodotte da quelle determinate tensioni, si dispongono secondo una stella regolare.

- Sistemi ***dissimmetrici e squilibrati***, nei quali non si ha né la simmetria delle tensioni né l'equilibrio nelle correnti. Essi si realizzano alimentando un carico trifase squilibrato mediante un sistema dissimmetrico di tensioni.

Quando mediante un sistema trifase di tensioni, si alimenta un carico trifase, il regime elettrico che si stabilisce nel sistema è diverso a seconda del collegamento interfasico adottato per il sistema generatore e del tipo di interconnessione adottata per il carico. Le varie combinazioni che possono verificarsi sono quattro:

	Collegamento interfasico delle tensioni	Interconnessione del carico
1)	Stella	Stella
2)	Stella	Triangolo
3)	Triangolo	Stella
4)	Triangolo	Triangolo

Conviene comunque, ai fini del calcolo del circuito, ricondurre ognuna delle quattro combinazioni alla prima o all'ultima di esse.

Per i sistemi simmetrici ed equilibrati, il calcolo è particolarmente agevole per la combinazione stella-stella, che si assume perciò come sistema tipico di tali sistemi.

Consideriamo tre circuiti monofase indipendenti (figura 10a), aventi uguale impedenza $\bar{Z}$, alimentati da tre generatori le cui tensioni $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$, costituiscono un sistema trifase simmetrico e che pertanto generano nei circuiti tre correnti $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$, costituenti un sistema equilibrato.

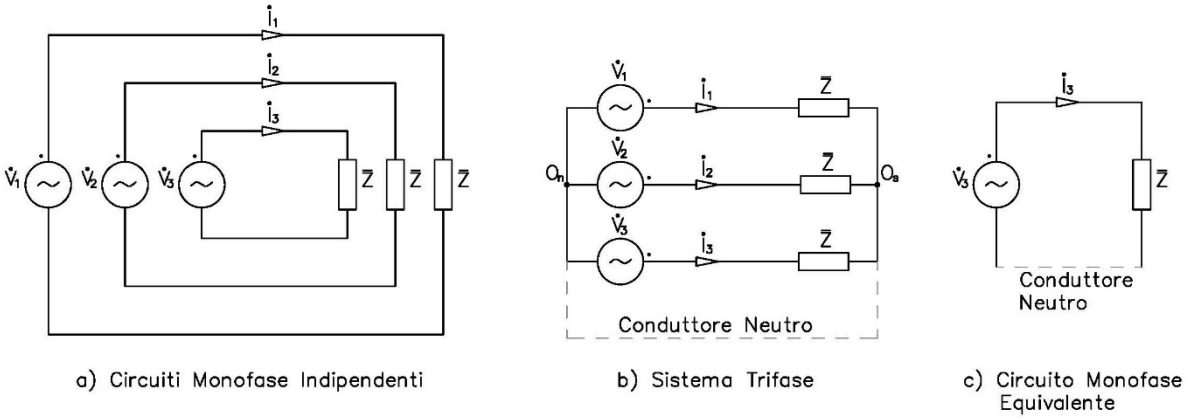


Figura 10

Se tutti i conduttori di ritorno sono ora riuniti fra loro in uno stesso conduttore (figura 10b), si ottiene un sistema trifase stella-stella, nel quale i morsetti delle fasi del generatore risultano collegati, mediante tre conduttori di linea, ai morsetti delle fasi del carico ed il neutro del generatore risulta collegato al centro stella del carico mediante un quarto conduttore che chiameremo ***conduttore neutro***. Nel neutro vengono quindi convogliate tutte le correnti del sistema trifase; poiché esse costituiscono un sistema equilibrato e, di conseguenza, la loro somma è in ogni istante nulla*, il conduttore neutro risulta percorso da una corrente identicamente nulla e può quindi essere soppresso senza che niente muti nel regime elettrico del sistema*. Si rileva quindi che la d.d.p. fra il punto neutro del sistema generatore ed il centro stella del carico è anch'essa identicamente nulla.
Quest'ultima affermazione può anche essere constatata applicando Millmann tra O_n ed O_s:

$$\dot{V}_{O_s O_n} = \dot{E}_M = \frac{\frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}} + \frac{\dot{V}_2}{\bar{Z}} + \frac{\dot{V}_3}{\bar{Z}}}{\frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}}} = \frac{\frac{1}{\bar{Z}}\left(\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3\right)}{\frac{3}{\bar{Z}}}$$

Ed essendo la terna delle tensioni una terna simmetrica e quindi pura, si ottiene:

$$\dot{V}_{O_s O_n} = \dot{E}_M = \frac{\frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}} + \frac{\dot{V}_2}{\bar{Z}} + \frac{\dot{V}_3}{\bar{Z}}}{\frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}}} = \frac{\frac{1}{\bar{Z}}\left(\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3\right)}{\frac{3}{\bar{Z}}} = 0$$

Quando il sistema è simmetrico ed equilibrato, i tre circuiti monofase indipendenti che nel loro complesso sono equivalenti al sistema trifase, sono tutti uguali tra loro; quindi lo studio del regime del sistema trifase può ricondursi a quello di uno solo di essi. Pertanto il calcolo di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato può essere effettuato limitandoci ad eseguire il calcolo di un circuito monofase (figura 10c) così costituito:

- dalla tensione $\dot{V}_h$ di una fase del generatore;
- dall'impedenza $\bar{Z}$ di una fase del carico;
- da un conduttore della linea e dal conduttore neutro.

Applicando tale principio, ogni corrente $\dot{I}_h$ del sistema trifase può dedursi immediatamente dalla rispettiva tensione dividendola per l'impedenza.

Per esempio abbiamo:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}} = \frac{V_1}{Ze^{j\varphi}} = \frac{V_1}{Z}e^{-j\varphi} = I_1 e^{-j\varphi}$$

E poiché il sistema è equilibrato, otteniamo le altre correnti ruotando in ritardo $\dot{I}_1$ di 120° ed ancora di ulteriori 120°

$$\dot{I}_1 = I_1 e^{-j\varphi}$$
$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-j\left(\frac{2}{3}\pi\right)}$$
$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 e^{-j\left(\frac{4}{3}\pi\right)}$$

Il calcolo dei sistemi simmetrici ed equilibrati con collegamento interfasico a triangolo del sistema generatore, può essere ricondotto a quello con collegamento a stella, introducendo il concetto di *tensioni stellate*.

Dati i tre conduttori di linea di un sistema trifase e le relative tensioni concatenate $\dot{V}_{12}, \dot{V}_{23}, \dot{V}_{32}$, chiameremo ***baricentro elettrico del sistema***, *il punto O_b ottenuto unendo a stella tre impedenze uguali collegate ai conduttori di linea* (figura 11).

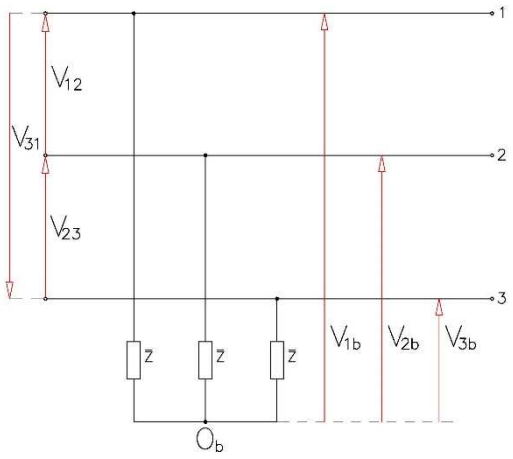


Figura 11

La definizione del baricentro elettrico, essendo riferita unicamente ai conduttori di linea, prescinde completamente dal collegamento interfasico del generatore. È evidente inoltre che in ogni sistema simmetrico ed equilibrato il baricentro O_b corrisponde al punto neutro O_n del generatore (nel senso che la d.d.p. fra i due è identicamente nulla) quando questo è connesso a stella e corrisponde altresì al centro stella di ogni carico equilibrato a stella connesso alla linea stessa.
Chiameremo poi ***tensioni stellate baricentriche*** $\dot{V}_{1b}, \dot{V}_{2b}, \dot{V}_{3b}$ *le tre tensioni esistenti fra ciascun conduttore di linea ed il baricentro*. E' superfluo notare anche che il baricentro elettrico del sistema coincide con il baricentro geometrico del triangolo i cui lati sono i vettori concatenati (tensioni di linea) della terna simmetrica di tensioni. Da quanto già detto, è chiaro che:

$$\dot{V}_{1b} = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{V}_{12}e^{-j\frac{\pi}{6}}$$
$$\dot{V}_{2b} = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{V}_{23}e^{-j\frac{\pi}{6}}$$
$$\dot{V}_{3b} = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{V}_{31}e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

La figura 12 riassume sinteticamente il calcolo di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato in tutti i casi possibili.

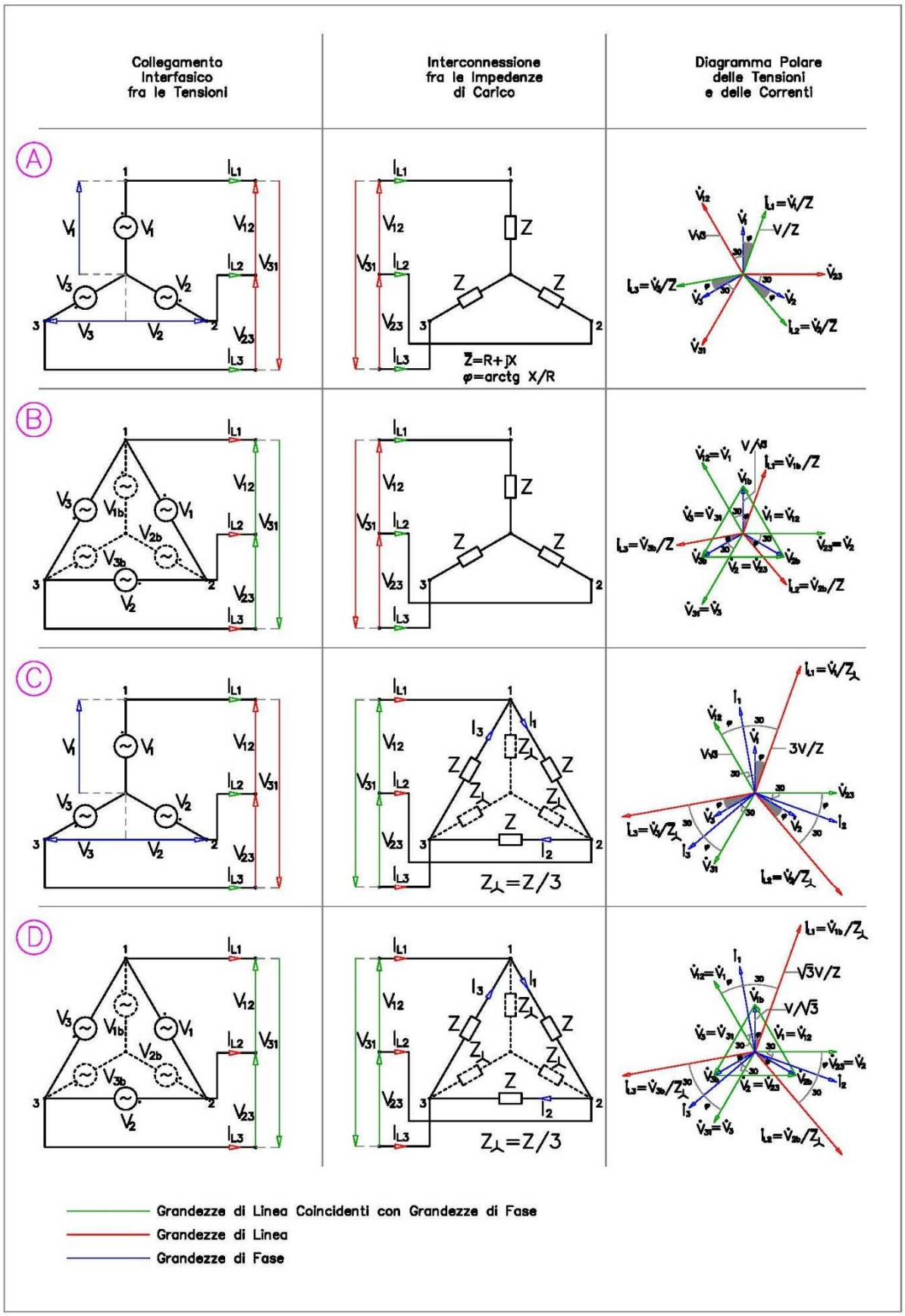

Collegamento Interfasico fra le Tensioni
Interconnessione fra le Impedenze di Carico
Diagramma Polare delle Tensioni e delle Correnti
A
B
C
D
Z=R+jX
φ=arctg X/R
Z⊥=Z/3
Grandezze di Linea Coincidenti con Grandezze di Fase
Grandezze di Linea
Grandezze di Fase

Figura 12

2.1 Potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati

Dato un sistema trifase simmetrico ed equilibrato, con collegamento stella-stella, le espressioni istantanee delle tensioni di fase e delle correnti di fase sono:

$$v_1 = V_M \sin \omega t \qquad i_1 = I_M \sin(\omega t - \varphi)$$
$$v_2 = V_M \sin\left(\omega t - \tfrac{2}{3}\pi\right) \qquad i_2 = I_M \sin\left(\omega t - \varphi - \tfrac{2}{3}\pi\right)$$
$$v_3 = V_M \sin\left(\omega t - \tfrac{4}{3}\pi\right) \qquad i_3 = I_M \sin\left(\omega t - \varphi - \tfrac{4}{3}\pi\right)$$

Le potenze istantanee erogate da ciascun generatore sono:

$$p_1 = v_1 i_1 = V_M \sin \omega t \, I_M \sin(\omega t - \varphi) = VI[\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = VI \cos \varphi - VI \cos(2\omega t - \varphi)$$
$$p_2 = v_2 i_2 = V_M \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) I_M \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi\right) =$$
$$= VI\left[\cos \varphi - \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right)\right] = VI \cos \varphi - VI \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right)$$
$$p_3 = v_3 i_3 = V_M \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) I_M \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right) =$$
$$= VI\left[\cos \varphi - \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{8}{3}\pi\right)\right] = VI \cos \varphi - VI \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{8}{3}\pi\right)$$

$notare\ che\ \left[\frac{8}{3}\pi = \left(2\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{2}{3}\pi\right]$

Sommando quindi membro a membro le precedenti equazioni, otteniamo la ***potenza istantanea per il sistema trifase simmetrico ed equilibrato***:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = VI \cos \varphi - VI \cos(2\omega t - \varphi) +$$
$$VI \cos \varphi - VI \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right) +$$
$$VI \cos \varphi - VI \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{8}{3}\pi\right)$$

Essendo le tre potenze fluttuanti tre sinusoidi di uguale ampiezza e sfasate tra loro di 120°, si ha che la loro somma è uguale a zero, di conseguenza:

$$p = 3VI \cos \varphi$$

Ricordando che V e I sono i valori efficaci delle grandezze di fase (collegamento stella-stella), possiamo scrivere:

$$p = 3V_f I_f \cos \varphi$$

Per questo possiamo affermare che in un sistema trifase simmetrico ed equilibrato la potenza istantanea è costante ed è uguale al triplo del prodotto dei valori efficaci della tensione di fase V_f e della corrente di fase I_f, moltiplicato per il coseno dell'angolo di fase φ tra $\dot{V}_f$ e $\dot{I}_f$ (angolo caratteristico delle impedenze del carico).
Questo vuol dire anche che la potenza fluttuante complessiva è nulla (attenzione che la potenza fluttuante in ogni fase non è nulla), quindi rilevare che in un sistema trifase la potenza fluttuante complessiva è nulla garantisce che il sistema sia simmetrico ed equilibrato.

Rammentando ora che la potenza attiva è definita come il valor medio della potenza istantanea, possiamo affermare che la potenza attiva trifase è:

$$P = 3V_f I_f \cos \varphi$$

che, ovviamente, coincide con la somma delle potenze attive messe in gioco da ciascuna fase.
Analogamente la potenza reattiva trifase è la somma delle potenze reattive messe in gioco da ciascuna fase, per cui:

$$Q = 3V_f I_f \sin \varphi$$

Occorre puntualizzare che nei sistemi trifase, la potenza reattiva perde il significato fisico di ampiezza della potenza reattiva istantanea ed assume solo un significato puramente matematico.

Usualmente, però, la potenza di un sistema trifase viene espressa in termini di grandezze di linea e quindi, tenendo presente che:

nel collegamento a stella	$I_l = I_f$	$V_l = \sqrt{3}V_f$
nel collegamento a triangolo	$I_l = \sqrt{3}I_f$	$V_l = V_f$

si ottiene:

collegamento a stella	collegamento a triangolo
$P = 3V_f I_f \cos\varphi = 3\frac{V_l}{\sqrt{3}} I_l \cos\varphi = \sqrt{3}\, V_l I_l \cos\varphi$	$P = 3V_f I_f \cos\varphi = 3V_l \frac{I_l}{\sqrt{3}} \cos\varphi = \sqrt{3}\, V_l I_l \cos\varphi$
$Q = 3V_f I_f \sin\varphi = 3\frac{V_l}{\sqrt{3}} I_l \sin\varphi = \sqrt{3}\, V_l I_l \sin\varphi$	$Q = 3V_f I_f \sin\varphi = 3V_l \frac{I_l}{\sqrt{3}} I_l \sin\varphi = \sqrt{3}\, V_l I_l \sin\varphi$

In definitiva definiamo ***potenza attiva trifase***

$$P = \sqrt{3}V_l I_l \cos\varphi$$

e ***potenza reattiva trifase***

$$Q = \sqrt{3}V_l I_l \sin\varphi$$

E' importante evidenziare che le due formule precedenti sono formule "ibride" poiché contengono sia grandezza di linea (V_l, I_l), sia grandezze di fase (φ); infatti φ è lo sfasamento tra il vettore tensione di fase ed il vettore corrente di fase.

Definiamo poi ***potenza apparente trifase***:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3}V_l I_l$$

Inoltre, utilizzando il teorema di Boucherot, definiamo ***potenza complessa di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato***:

$$\bar{S} = 3\dot{V}_f x \check{I}_f = Se^{j\varphi}$$

Il ***fattore di potenza***, definito come rapporto tra potenza attiva e potenza apparente, nel sistema trifase simmetrico ed equilibrato sarà:

$$f.d.p. = \frac{P}{S} = \frac{\sqrt{3}V_l I_l \cos\varphi}{\sqrt{3}V_l I_l} = \cos\varphi$$

Possiamo quindi affermare che nei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati il fattore di potenza coincide, come per i sistemi monofase, con il coseno dell'angolo caratteristico delle impedenze del carico.

Comunque è bene fin d'ora definire il fattore di potenza di un sistema trifase come il coseno dell'angolo di cui va ruotata la stella dei vettori delle correnti, rispetto a quella delle tensioni, affinché l'espressione della potenza attiva del sistema assuma il massimo valore possibile.

2.2 Campo magnetico rotante di Galileo Ferraris

Galileo Ferraris scoprì e dimostrò un'importante proprietà dei sistemi trifase e cioè che questi sistemi *possono generare dei campi magnetici rotanti mediante sistemi trifase di correnti che percorrono avvolgimenti fissi nello spazio*.

Immaginiamo di disporre tre bobine identiche, cioè di uguale materiale, uguale lunghezza ed ugual numero di spire N, in una posizione fissa nello spazio, nella quale i loro assi siano complanari e formino tra di loro angoli di 120° l'uno rispetto all'altro (figura 13) e supponiamo di alimentarle con una terna simmetrica di tensioni. Essendo quindi le bobine un carico equilibrato, le stesse saranno percorse da una terna equilibrata di correnti.

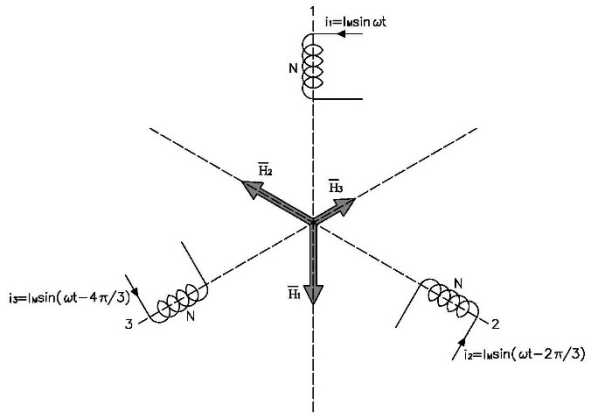


Figura 13

Se il mezzo è isotropo e la sua permeabilità magnetica è costante, le bobine generano tre campi magnetici che, nella zona centrale di esse, hanno una direzione coincidente con quella dell'asse delle rispettive bobine ed una ***intensità variabile nel tempo*** con la medesima legge sinusoidale delle correnti che li producono:

$$H_1(t) = H_M \sin \omega t$$
$$H_2(t) = H_M \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$$
$$H_3(t) = H_M \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)$$

Il campo risultante $\vec{H}_{ris}(t)$ è ovviamente, istante per istante, la somma geometrica dei tre vettori $\vec{H}_1(t)$, $\vec{H}_2(t)$, $\vec{H}_3(t)$:

$$\vec{H}_{ris}(t) = \vec{H}_1(t) + \vec{H}_2(t) + \vec{H}_3(t)$$

Riferendoci al piano di Gauss coincidente con il piano degli assi delle bobine (figura 14) abbiamo:

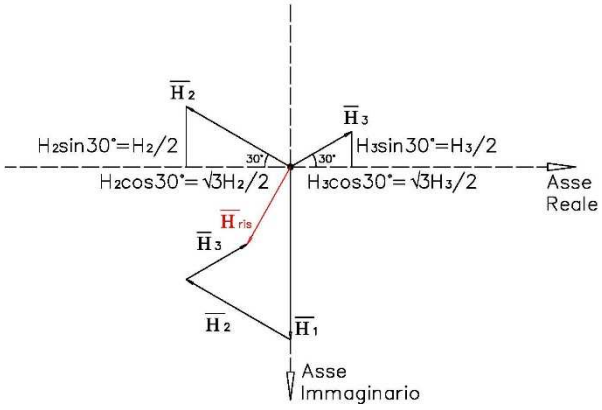


Figura 14

$$\vec{H}_1(t) = -jH_1(t) = -jH_M \sin \omega t$$
$$\vec{H}_2(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}H_2(t) + j\frac{1}{2}H_2(t)$$
$$\vec{H}_3(t) = +\frac{\sqrt{3}}{2}H_3(t) + j\frac{1}{2}H_3(t)$$

$$\vec{H}_{ris}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}[H_3(t) - H_2(t)] + j\left[\frac{H_3(t) + H_2(t)}{2} - H_1(t)\right]$$

Ed essendo:

$$H_1(t) = H_M \sin \omega t$$
$$H_2(t) = H_M \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) = H_M\left[\sin \omega t \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) - \cos \omega t \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right] = H_M\left(-\frac{1}{2}\sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega t\right)$$
$$H_3(t) = \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) = H_M\left[\sin \omega t \cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) - \cos \omega t \sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)\right] = H_M\left(-\frac{1}{2}\sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega t\right)$$

Avremo:

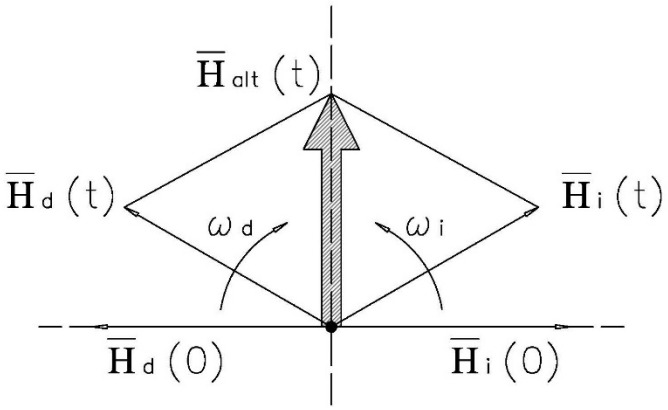
$$H_3(t) - H_2(t) = H_M\left(-\frac{1}{2}\sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega t\right) - H_M\left(-\frac{1}{2}\sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega t\right) = \sqrt{3}H_M \cos \omega t$$
$$H_3(t) + H_2(t) = H_M\left(-\frac{1}{2}\sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega t\right) + H_M\left(-\frac{1}{2}\sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega t\right) = -H_M \sin \omega t$$

Per cui:

$$\vec{H}_{ris}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}[H_3(t) - H_2(t)] + j\left[\frac{H_3(t) + H_2(t)}{2} - H_1(t)\right]$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}H_M \cos \omega t + j\left(-\frac{1}{2}H_M \sin \omega t - H_M \sin \omega t\right) = \frac{3}{2}H_M \cos \omega t - j\frac{3}{2}H_M \sin \omega t = \frac{3}{2}H_M e^{-j\omega t}$$

In definitiva abbiamo ottenuto che *il campo risultante $\vec{H}_{ris}(t)$ ha un'intensità costante nel tempo pari ad una volta e mezzo il campo massimo H_M prodotto da ciascuna bobina ed una direzione che ruota nello spazio, rispetto al sistema che lo genera, a velocità costante ω, pari alla pulsazione delle correnti; quindi questo campo compie un giro completo ogni ciclo della corrente. Il senso di rotazione del campo è concorde al senso ciclico delle correnti che lo generano.*

Allo stesso Galileo Ferraris è dovuto il principio dell'equivalenza fra un campo alternativo ed un complesso di due campi rotanti in senso opposto l'uno con l'altro.
Consideriamo un campo alternativo avente direzione fissa nello spazio (figura 15) ed una ***intensità variabile nel tempo con legge sinusoidale***:



$$H_{alt}(t) = H_M \sin \omega t$$

Figura 15

Consideriamo poi due campi magnetici di ***intensità costante nel tempo***, pari ad $\frac{1}{2}H_M$, e direzione rotante nello spazio a velocità angolare costante, uguale alla pulsazione ω; i sensi di rotazione dei due campi siano fra loro opposti e chiamiamo *componente diretto* $\vec{H}_d(t)$ il campo che ruota in senso orario e *componente inverso* $\vec{H}_i(t)$ quello che ruota in senso opposto.

Se $\vec{H}_d(t)$ ed $\vec{H}_i(t)$ all'istante zero hanno direzione perpendicolare alla direzione di H_{alt} e senso l'uno opposto all'altro, è chiaro che ad ogni istante la loro posizione è sempre simmetrica rispetto alla direzione del campo alternativo e, quindi, la loro risultante ha sempre la stessa direzione di tale campo ed una intensità identicamente uguale all'intensità di esso:

$$\vec{H}_{ris}(t) = \vec{H}_d + \vec{H}_i = 2\frac{\vec{H}_M}{2}\sin \omega t = \vec{H}_{alt}(t)$$

Possiamo quindi concludere che *un campo alternativo è equivalente a due campi rotanti in senso opposto, con velocità angolare uguale alla pulsazione del campo alternativo ed aventi una intensità costante uguale alla metà del valore massimo del campo alternativo stesso*.