UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

I Circuiti in Regime Periodico non Sinusoidale

Anno Accademico 2016-2017

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:
Lezioni di Elettrotecnica Generale *- Giulio Battistini*
Colombo Cursi Pisa

1 Grandezze deformate

In generale, nei circuiti elettrici, lavoriamo con grandezze alternative che hanno un andamento nel tempo che si avvicina, con buona approssimazione, alla forma sinusoidale ma che contiene quasi sempre delle armoniche di ordine superiore che introducono piccole o grandi deformazioni.
Un modo per definire una gradazione dello scostamento di una grandezza alternativa dalla forma sinusoidale è quello di confrontare il suo ***fattore di forma*** con quello costante delle grandezze sinusoidali.
Si definisce fattore di forma (k_f) di una grandezza alternativa, il rapporto tra il suo valore efficace ed il suo valore medio:

$$k_f = \frac{A}{A_m} \tag{0.1}$$

Il fattore di forma per le grandezze sinusoidali è:

$$k_f = \frac{A}{A_m} = \frac{\frac{A_M}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi}A_M} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.11$$

Con A_m valore medio nel semiperiodo.

Un altro modo usato nella pratica per valutare quantitativamente il grado di deformazione di una grandezza alternativa, è quello di riferirsi al ***residuo*** (*grandezza che risulta dalla grandezza data, depurandola della fondamentale*) ed assumere come indice di deformazione il *residuo relativo* (r) o distorsione totale, definita come il rapporto tra il valore efficace del "residuo" (A_r) ed il valore efficace della grandezza data (A)

$$r = \frac{A_r}{A}$$

Normalmente, però, l'uso corrente di graduare lo scostamento di una grandezza alternativa dalla forma sinusoidale, consiste nel considerare il cosiddetto *fattore di deformazione*.

Si dice *sinusoide equivalente* di una grandezza alternativa, la sinusoide che ha lo stesso periodo e lo stesso valore efficace della grandezza considerata.
La sinusoide equivalente di una grandezza alternativa è utile nella pratica perché può essere sostituita, in prima approssimazione, alla grandezza data e perché consente di stabilire un criterio di valutazione della *deformazione* della grandezza stessa, rispetto alla sinusoide.
A tale scopo è necessario attribuire alla sinusoide equivalente la posizione, lungo l'asse dei tempi (fig. 1), in corrispondenza della quale la massima differenza di ordinate tra essa e la curva della grandezza data, è la più piccola possibile.

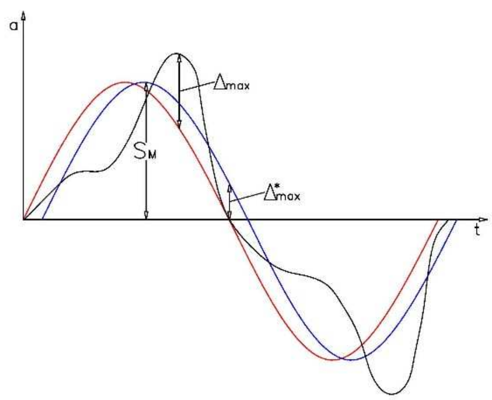


Figura 1 – Sinusoide equivalente di una grandezza alternativa

2 Calcolo delle grandezze periodiche non sinusoidali.

Lo strumento idoneo per il calcolo elementare delle grandezze periodiche non sinusoidali è l'analisi armonica. In pratica ogni grandezza periodica $f(t)$ può scomporsi nella serie di Fourier:

$$f(t) = \frac{A_{M0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[A_{Mn}\, cos(\,n\omega\, t) + B_{Mn} sen(n\omega t)] \qquad (0.2)$$

dove:

$$\begin{cases} \dfrac{A_{M0}}{2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\, dt \\ A_{Mn} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\, cos(\,n\omega t)\, dt \\ B_{Mn} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t) sen(n\omega t)\, dt \end{cases}$$

Infatti:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A_{M0}}{2} dt + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T [A_{Mn}\, cos(\,n\omega\, t) + B_{Mn} sen(n\omega t)]\, dt = \frac{1}{T}\frac{A_{M0}}{2} T + 0 = \frac{A_{M0}}{2}$$

Poiché il secondo addendo del secondo membro, essendo l'integrale di una grandezza sinusoidale esteso ad un intervallo multiplo del proprio periodo, è nullo.

Inoltre

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\, cos(\,n\omega t) dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A_{M0}}{2} cos(\,n\omega t) dt + \frac{2}{T}\int_0^T cos(\,n\omega t) \sum_{k=1}^{\infty}[A_{Mk}\, cos(\,k\omega t) + B_{Mk} sen(k\omega t)]\, dt$$

Il primo addendo del secondo membro, essendo l'integrale di una grandezza sinusoidale esteso ad un intervallo multiplo del proprio periodo, è nullo.
Il secondo addendo è la somma di sue serie:

$$\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T cos(\,n\omega t) * A_{Mk}\, cos(\,k\omega t) dt$$
$$\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T cos(\,n\omega t) * B_{Mk} sen(k\omega t) dt$$

In ciascuna delle due serie sono tutti nulli i termini per i quali $k \neq n$. Infatti ognuno di essi è il prodotto di due grandezze sinusoidali di frequenza diversa e quindi, come ben noto per le formule di Werner, è uguale alla somma di due grandezze sinusoidali, ciascuna delle quali, integrata tra 0 e T, dà come risultato 0.

Le due serie si riducono perciò ai soli termini per i quali $k = n$; avremo di conseguenza:

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,cos(n\omega t)dt = 0 + \frac{2}{T}\int_0^T A_{Mn}\,cos^2(n\omega t)dt + \frac{2}{T}\int_0^T B_{Mn}\,cos(n\omega t)sen(n\omega t)dt =$$
$$= \frac{2}{T}A_{Mn}\int_0^T \frac{1+cos(2n\omega t)}{2}dt + \frac{2}{T}B_{Mn}\int_0^T \frac{sen(2\omega t)}{2}dt = \frac{2}{T}A_{Mn}\frac{T}{2} + 0 = A_{MN}$$

Con procedimento analogo si dimostra che:

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)sen(n\omega t)dt = B_{Mn}$$

Normalmente si reputa più utile effettuare la decomposizione della $f(t)$ in una forma più adatta alle applicazioni che si deduce dalla (2.1) riunendo in un unico termine gli addendi contenenti il seno ed il coseno degli argomenti di ugual frequenza ed esprimendoli tutti in funzione del solo seno:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n) \qquad (0.3)$$

dove:

$$\begin{cases} C_0 = \dfrac{A_{M0}}{2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt \\ C_{Mn} = \sqrt{A_{Mn}^2 + B_{Mn}^2} \\ \alpha_n = arctan\,g\dfrac{A_{Mn}}{B_{Mn}} + k\pi \end{cases}$$

I termini che costituiscono lo sviluppo di questa serie sono tutti (ad eccezione del termine costante C_0) sinusoidi di frequenza nf e quindi periodo T/n; essi si chiamano *componenti armoniche*.
Il termine C_0 (detto armonica di ordine zero perché corrisponde a $n = 0$), si chiama *componente continua* ed è anche il valor medio della funzione $f(t)$.

Infatti, da semplici relazioni trigonometriche (fig. 2) si trova:

$$m = \sqrt{m^2+n^2}sen\beta$$
$$n = \sqrt{m^2+n^2}\cos\beta$$
$$\beta = arctan\,g\frac{m}{n}$$

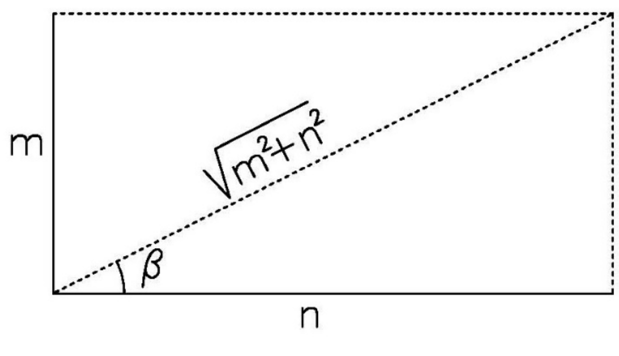


Figura 2 – Relazioni trigonometriche per il calcolo delle componenti armoniche

$$m\cos\alpha + nsen\alpha = \sqrt{m^2+n^2}\left(\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\cos\alpha + \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}sen\alpha\right) = \sqrt{m^2+n^2}(sen\beta\cos\alpha + \cos\beta\, sen\alpha) =$$
$$= \sqrt{m^2+n^2}sen(\alpha+\beta) = \sqrt{m^2+n^2}sen\left(\alpha + arctan\,g\frac{m}{n}\right)$$

L'analisi armonica di una funzione si effettua eseguendo il calcolo del termine costante C_0 e dell'ampiezza C_{Mn} e fase α_n di ciascuna delle armoniche.

È utile rammentare che nello sviluppo in serie di Fourier di una grandezza alternativa, la componente costante e tutte le armoniche di ordine pari sono sempre nulle.

3 Circuiti lineari alimentati da tensioni non sinusoidali.

Consideriamo un circuito R, L, C in serie e supponiamo di alimentarlo con una tensione periodica non sinusoidale $v(t)$ che, sviluppata in serie di Fourier, sia rappresentata dalla relazione:

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n)$$

Il cui valore efficace sia quindi:

$$V = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 + V_3^2 + \dots\dots\dots\dots}$$

Essendo il circuito lineare, possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e determinare la corrente $i(t)$ che circolerà a regime permanente nel circuito, come la risultante delle correnti parziali che ciascuna componente armonica della tensione genererebbe agendo da sola; quindi:

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{Mn}}{Z_n} sen(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n)$$

dove:

$$\begin{cases} Z_n = \sqrt{R^2 + \left(n\omega L - \dfrac{1}{n\omega C}\right)^2} \\ \varphi_n = \arctan g \dfrac{n\omega L - \dfrac{1}{n\omega C}}{R} \\ I_{Mn} = \dfrac{V_{Mn}}{Z_n} \end{cases}$$

Indicando con I_n il valore efficace di ciascuna armonica ($I_n = \frac{I_{Mn}}{\sqrt{2}}$), il valore efficace della corrente complessiva $i(t)$ che circola nel circuito è:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots\ldots\ldots}$$

Quindi, la determinazione della corrente $i(t)$ che circola in un circuito lineare alimentato da una tensione periodica non sinusoidale, può effettuarsi eseguendo l'analisi armonica della tensione $v(t)$ di alimentazione, ricavando in grandezza e fase da ogni armonica $\dot{V}_n$ della tensione, la corrispondente armonica $\dot{I}_n$ della corrente, dalla relazione $\dot{I}_n = \frac{\dot{V}_n}{\overline{Z}_n}$ e ricavando infine l'andamento nel tempo $i(t)$ della corrente a regime mediante la composizione delle proprie armoniche.

Il termine costante I_0 è la componente continua:

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

La componente continua può essere diversa da zero solo nei circuiti che non contengano capacità in serie perché, naturalmente, il condensatore non permette il passaggio di componenti continue a regime permanente.
Ciascuna delle componenti armoniche sinusoidali della corrente $(\dot{I}_n)$ è data dal quoziente di ciascuna componente armonica della tensione $(\dot{V}_n)$per la corrispondente impedenza $(\overline{Z}_n)$:

$$\dot{I}_n = \frac{\dot{V}_n}{\overline{Z}_n}$$

Ma l'impedenza $\overline{Z}_n$, essendo funzione della frequenza, è diversa per le diverse armoniche; di conseguenza l'ampiezza delle armoniche della corrente non è proporzionale all'ampiezza delle armoniche della tensione. Anche la fase φ_n per la stessa ragione è diversa da un'armonica all'altra. Quindi, in generale, *nei circuiti non puramente resistivi la forma d'onda della corrente è diversa dalla forma d'onda della tensione*.

Nei *circuiti resistivi puri*, le armoniche della corrente hanno ampiezza proporzionale alle corrispondenti armoniche della tensione e sono in fase con esse. Di conseguenza, *la curva della corrente è omotetica con quella della tensione ed ha i suoi massimi e punti di zero in corrispondenza dei massimi e dei punti di zero della tensione*.

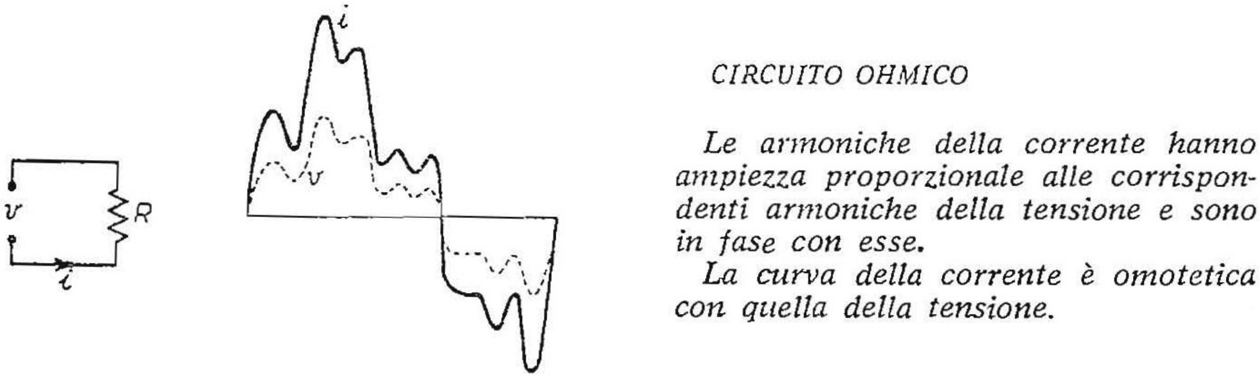
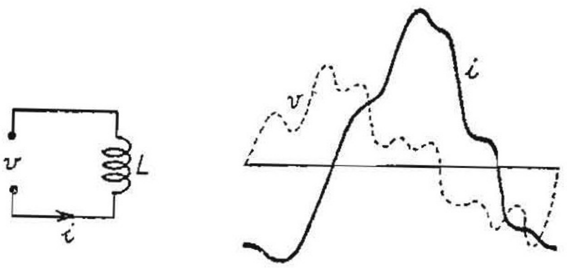


Figura 3a

Nei *circuiti induttivi puri*, l'impedenza che il circuito presenta in corrispondenza delle varie armoniche ($Z_n = n\omega L$) aumenta all'aumentare della frequenza, quindi le successive armoniche della corrente (in ritardo in quadrature sulle corrispondenti armoniche della tensione) hanno un'ampiezza:

$$I_{Mn} = \frac{V_{Mn}}{n\omega L}$$

che sta all'ampiezza della corrispondente armonica di tensione in un rapporto che decresce al crescere del numero d'ordine n dell'armonica.
Pertanto, le armoniche superiori, con il crescere del loro ordine, incidono sulla curva della corrente in misura progressivamente più piccola di quella con cui incidono sulla curva della tensione; quindi, *la forma d'onda della corrente è meno deformata, rispetto alla sinusoide, di quella della tensione*.



CIRCUITO INDUTTIVO

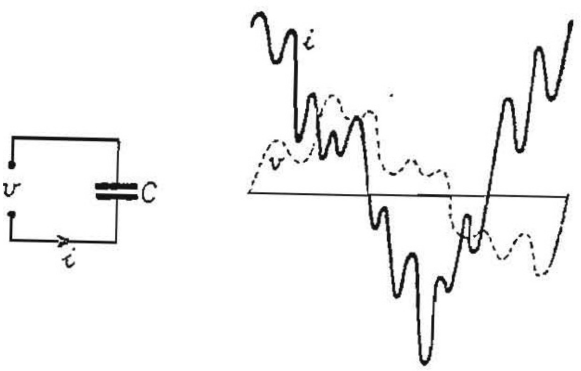
L'impedenza che il circuito presenta alle varie armoniche, cresce col crescere della frequenza; perciò le armoniche superiori incidono sulla curva della corrente in misura progressivamente più piccola di quella con cui incidono sulla curva della tensione.
La forma d'onda della corrente è meno deformata di quella della tensione.

Figura 3b

Nei *circuiti capacitivi puri*, l'impedenza che il circuito presenta in corrispondenza delle varie armoniche ($Z_n = 1/n\omega C$) diminuisce all'aumentare della frequenza, quindi le successive armoniche della corrente (in anticipo in quadrature sulle corrispondenti armoniche della tensione) hanno un'ampiezza:

$$I_{Mn} = n\omega C V_{Mn}$$

che sta all'ampiezza della corrispondente armonica di tensione in un rapporto che cresce al crescere del numero d'ordine n dell'armonica.
Pertanto, le armoniche superiori, con il crescere del loro ordine, incidono sulla curva della corrente in misura progressivamente maggiore di quella con cui incidono sulla curva della tensione; quindi, *la forma d'onda della corrente è più deformata, rispetto alla sinusoide, di quella della tensione*.



CIRCUITO CAPACITIVO

L'impedenza del circuito diminuisce col crescere della frequenza; perciò l'ampiezza delle armoniche superiori della corrente sta all'ampiezza delle corrispondenti armoniche della tensione in un rapporto progressivamente crescente.
La forma d'onda della corrente risulta più deformata di quella della tensione.

Figura 3c

Nei *circuiti compositi*, infine, la forma d'onda della corrente è tanto più simile a quella della tensione quanto più il valore della resistenza è prevalente su quello della reattanza.
La proprietà dei circuiti induttivi, allorché alimentati da una tensione periodica non sinusoidale, di deprimere le armoniche di ordine più elevato della corrente (oppure, qualora percorsi da una corrente periodica non sinusoidale, di esaltare ai loro morsetti le armoniche più elevate della tensione) e la proprietà duale e contraria dei circuiti capacitivi, trovano larga applicazione per la realizzazione di *circuiti filtranti* atti a ridurre fortemente e praticamente ad eliminare le armoniche di frequenza superiore o inferiore ad una frequenza prestabilita (*filtri bassa-basso e filtri passa-alto*).

Un circuito alimentato con una tensione periodica non sinusoidale non può assumere un regime di risonanza completa perché è ovviamente impossibile che, nell'ipotesi di circuito RLC serie, che siano contemporaneamente soddisfatte tutte le condizioni:

$$\omega^2 LC = 1\,; \qquad (2\omega)^2 LC = 1\,; \qquad (3\omega)^2 LC = 1; \dots \dots$$

È invece possibile che sia soddisfatta l'una o l'altra di esse; in tal caso si dice che il circuito è in risonanza per quella particolare armonica. Questo fenomeno si dice *risonanza parziale* del circuito.

4 Potenze nei circuiti lineari alimentati da tensioni non sinusoidali.

Un sistema lineare alimentato da una tensione periodica non sinusoidale:

$$v = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n)$$

e percorso dalla corrente:

$$i = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n)$$

dove il termine I_0 sarà nullo per tutti i circuiti comprendenti una capacità in serie, assorbe dal generatore, istante per istante, la potenza istantanea:

$$p = vi = V_0 I_0 + V_0 \sum_{n=1}^{\infty} I_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n) + I_0 \sum_{n=1}^{\infty} V_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n) + \sum_{n=1}^{\infty} V_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n) \sum_{n=1}^{\infty} I_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n)$$

L'andamento nel tempo della potenza istantanea è quindi molto complesso; la sua curva rappresentativa è la risultante della somma di un termine costante ($V_0 I_0$), di due termini contenenti rispettivamente tutte le armoniche della corrente e tutte le armoniche della tensione $[V_0 \sum_{n=1}^{\infty} I_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n) + I_0 \sum_{n=1}^{\infty} V_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n)]$ e di un quarto termine costituito dalla somma dei prodotti di ciascuna armonica della tensione per ciascuna armonica della corrente $[\sum_{n=1}^{\infty} V_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n) \sum_{n=1}^{\infty} I_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n)]$.

La ***potenza attiva*** (P) del circuito, come per i circuiti in regime sinusoidale, è uguale al valor medio della potenza istantanea, quindi considerando che gli integrali estesi al periodo del secondo e del terzo termine di p sono nulli e che, sviluppando il quarto termine, i prodotti delle armoniche di frequenza diversa (essendo uguali alla somma di due grandezze sinusoidali) hanno ugualmente integrale nullo, si ha:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T pdt = \frac{1}{T}\int_0^T [V_0 I_0 + V_0 \sum_{n=1}^{\infty} I_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n) + I_0 \sum_{n=1}^{\infty} V_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n)]dt + \\ + \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_{Mn} I_{Mn} sen(n\omega t + \alpha_n)\, sen(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n)\, dt = V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \,cos\varphi_n\, \varphi_n$$

Poiché le correnti $I_0, \dot{I}_1, \dot{I}_2 \ldots\ldots$, sono quelle che circolerebbero nel circuito qualora venissero ad esso applicate singolarmente i rispettivi componenti armonici della tensione $V_0, \dot{V}_1, \dot{V}_2 \ldots\ldots$, si deduce che *la potenza attiva del circuito è uguale alla somma delle potenze attive che sarebbero generate da ogni singola armonica della tensione quando agisse separatamente dalle altre*.

Chiameremo ancora ***potenza apparente*** (S) del circuito il prodotto dei valori efficaci della tensione e della corrente:

$$S = VI = \sqrt{{V_0}^2 + {V_1}^2 + V_2^2 + \ldots\ldots\ldots} \sqrt{{I_0}^2 + {I_1}^2 + I_2^2 + \ldots\ldots\ldots}$$

Definiremo ancora ***fattore di potenza*** (fdp) il rapporto fra la potenza attiva e la potenza apparente:

$$fdp = \frac{P}{S}$$

In analogia matematica a quanto dedotto per la potenza attiva, chiameremo ***potenza reattiva*** (Q) la somma delle potenze reattive che sarebbero messe in giuoco nel circuito da ogni singola armonica di tensione quando agisse separatamente dalle altre:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n sen\varphi_n$$

È facile rilevare che in questo regime non è valida la relazione fondamentale tra le potenze S, P e Q dettata dal triangolo delle potenze; in questo caso si ha:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$$

dove D è una grandezza denominate ***potenza deformante*** ed è caratteristica di questi regimi periodici non sinusoidali.

Sommario

1 Grandezze deformate 2

2 Calcolo delle grandezze periodiche non sinusoidali. 3

3 Circuiti lineari alimentati da tensioni non sinusoidali. 5

4 Potenze nei circuiti lineari alimentati da tensioni non sinusoidali. 9

Sommario 11