UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
*Dipartimento di Ingegneria*
*Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina*

# *Appunti Corso di Elettrotecnica*

***Il calcolo delle grandezze sinusoidali***
***Parte Seconda***

*Anno Accademico 2023-2024*

*prof. ing. Bruno Azzerboni*

***Fonti:***
***Lezioni di Elettrotecnica Generale*** *- Giulio Battistini*
*Colombo Cursi Pisa*
***Elettrotecnica*** *- Giulio Battistini – Franco Nencioni*
*Le Monnier 1984*

***La rappresentazione algebrica delle grandezze sinusoidali***
La forma più comune di rappresentazione di una grandezza sinusoidale è l'usuale espressione algebrica della legge che regola il suo andamento nel tempo:

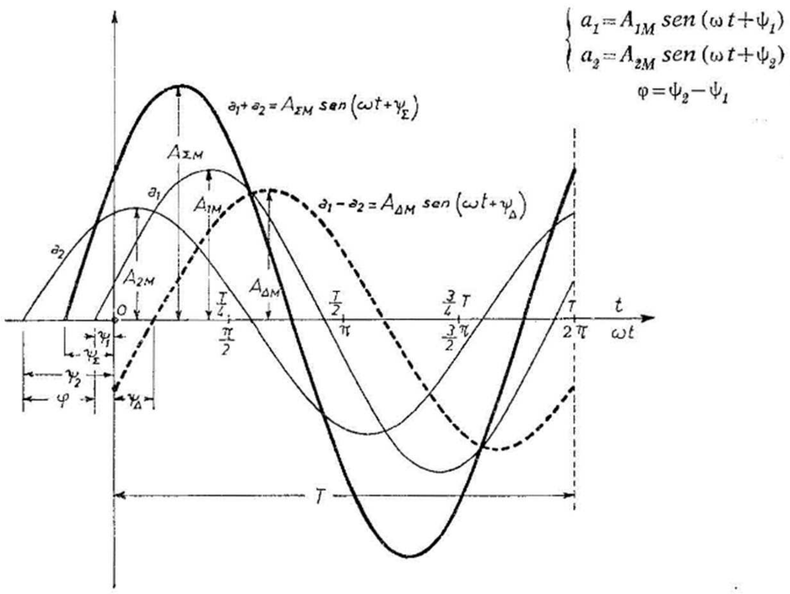
$$a = A_M \sin(\omega t + \psi)$$

alla quale corrisponde il noto diagramma cartesiano $a = f(t)$.
Le operazioni fra grandezze sinusoidali, espresse in forma algebrica, si eseguiscono secondo i·noti procedimenti dell'algebra
Siano $a_1$ e $a_2$, due grandezze sinusoidali di ugual frequenza $f$ e pulsazione $\omega = 2\pi f$, di ampiezza rispettiva $A_{1M}$ e $A_{2M}$, e fase $\psi_1$ e $\psi_2$:

$$\begin{cases} a_1 = A_{1M} \sin(\omega t + \psi_1) \\ a_2 = A_{2M} \sin(\omega t + \psi_2) \end{cases}$$

Aventi quindi una differenza di fase:

$$\varphi = \psi_2 - \psi_1$$




$$\begin{cases} A_{\Sigma M} = \sqrt{A_{1M}^2 + A_{2M}^2 + 2A_{1M}A_{2M}\cos\varphi} \\ \psi_\Sigma = \tan^{-1}\dfrac{A_{1M}\sin\psi_1 + A_{2M}\sin\psi_2}{A_{1M}\cos\psi_1 + A_{2M}\cos\psi_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{\Delta M} = \sqrt{A_{1M}^2 + A_{2M}^2 - 2A_{1M}A_{2M}\cos\varphi} \\ \psi_\Delta = \tan^{-1}\dfrac{A_{1M}\sin\psi_1 - A_{2M}\sin\psi_2}{A_{1M}\cos\psi_1 - A_{2M}\cos\psi_2} \end{cases}$$

*Fig. 10 – Somma e differenza di due grandezze sinusoidali isofrequenziali*

La somma e la differenza fra $a_1$ e$a_2$ , sono date dalle espressioni (fig. 10):

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = A_{\Sigma M} \sin(\omega t + \psi_\Sigma) \\ a_1 - a_2 = A_{\Delta M} \sin(\omega t + \psi_\Delta) \end{cases}$$

per le quali, le ampiezze sono:

$$\begin{cases} A_{\Sigma M} = \sqrt{A_{1M}^2 + A_{2M}^2 + 2A_{1M}A_{2M}\cos\varphi} \\ A_{\Delta M} = \sqrt{A_{1M}^2 + A_{2M}^2 - 2A_{1M}A_{2M}\cos\varphi} \end{cases}$$

e gli angoli di fase[1]:

$$\begin{cases} \psi_\Sigma = \tan^{-1} \dfrac{A_{1M} \sin\psi_1 + A_{2M} \sin\psi_2}{A_{1M} \cos\psi_1 + A_{2M} \cos\psi_2} \\ \psi_\Delta = \tan^{-1} \dfrac{A_{1M} \sin\psi_1 - A_{2M} \sin\psi_2}{A_{1M} \cos\psi_1 - A_{2M} \cos\psi_2} \end{cases}$$

Vale a dire: *la somma e la differenza di due grandezze sinusoidali isofrequenziali sono grandezze sinusoidali della stessa frequenza delle grandezze date ed aventi l'ampiezza e la fase indicate dalle precedenti espressioni.*

Il prodotto delle due grandezze

$$\begin{cases} a_1 = A_{1M} \sin(\omega t + \psi_1) \\ a_2 = A_{2M} \sin(\omega t + \psi_2) \end{cases}$$

indicando con $\varphi = \psi_2 - \psi_1$, la differenza di fase tra di esse ed esprimendo i loro valori massimi in funzione dei rispettivi valori efficaci $\left(A_{1M} = A_1\sqrt{2}; \quad A_{2M} = A_2\sqrt{2}\right)$, è dato da[2]:

$$a_1 a_2 = A_1 A_2 \cos\varphi - A_1 A_2 \cos(2\omega t + \psi_1 + \psi_2)$$

vale a dire: *il prodotto di due grandezze sinusoidali isofrequenziali è una grandezza periodica non sinusoidale che oscilla (con legge sinusoidale, con frequenza doppia e con ampiezza uguale al prodotto dei valori efficaci dei fattori) attorno ad un valore medio uguale al prodotto dei valori efficaci dei fattori, moltiplicato per il coseno dell'angolo differenza di fase fra di essi* (fig. 11).

---

[1] Infatti

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= A_{1M} \sin(\omega t + \psi_1) + a_2 = A_{2M} \sin(\omega t + \psi_2) \\ &= A_{1M}(\sin\omega t \cos\psi_1 + \cos\omega t \sin\psi_1) + A_{2M}(\sin\omega t \cos\psi_2 + \cos\omega t \sin\psi_2) \\ &= (A_{1M} \cos\psi_1 + A_{2M} \cos\psi_2) \sin\omega t + (A_{1M} \sin\psi_1 + A_{2M} \sin\psi_2) \cos\omega t \end{aligned}$$

Da cui:

$$a_1 + a_2 = \sqrt{(A_{1M} \cos\psi_1 + A_{2M} \cos\psi_2)^2 + (A_{1M} \sin\psi_1 + A_{2M} \sin\psi_2)^2} \sin\left(\omega t + \tan^{-1} \frac{A_{1M} \sin\psi_1 + A_{2M} \sin\psi_2}{A_{1M} \cos\psi_1 + A_{2M} \cos\psi_2}\right)$$

Pertanto l'ampiezza $A_{\Sigma M}$ della somma di $a_1$ e $a_2$ è:

$$\begin{aligned} A_{\Sigma M} &= \sqrt{(A_{1M} \cos\psi_1 + A_{2M} \cos\psi_2)^2 + (A_{1M} \sin\psi_1 + A_{2M} \sin\psi_2)^2} \\ &= \sqrt{A_{1M}^2(\sin^2\psi_1 + \cos^2\psi_1) + A_{2M}^2(\sin^2\psi_2 + \cos^2\psi_2) + 2A_{1M}A_{2M}(\cos\psi_1 \cos\psi_2 + \sin\psi_1 \sin\psi_2)} \\ &= \sqrt{A_{1M}^2 + A_{2M}^2 + 2A_{1M}A_{2M}\cos(\psi_2 - \psi_1)} = \sqrt{A_{1M}^2 + A_{2M}^2 + 2A_{1M}A_{2M}\cos\varphi} \end{aligned}$$

e la fase è:

$$\psi_\Sigma = \tan^{-1} \frac{A_{1M} \sin\psi_1 + A_{2M} \sin\psi_2}{A_{1M} \cos\psi_1 + A_{2M} \cos\psi_2}$$

Con analogo calcolo calcoliamo l'ampiezza $A_{\Delta M}$ e la fase $\psi_\Delta$ della differenza tra $a_1$ e $a_2$.

[2] Infatti, ricordando che $\sin\alpha \sin\beta = {}^1\!/_2\,[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, si ha:

$$a_1 a_2 = A_{1M} \sin(\omega t + \psi_1)\, A_{2M} \sin(\omega t + \psi_2) = \frac{A_{1M}A_{2M}}{2}[\cos(\psi_1 - \psi_2) - \cos(2\omega t + \psi_1 + \psi_2)]$$

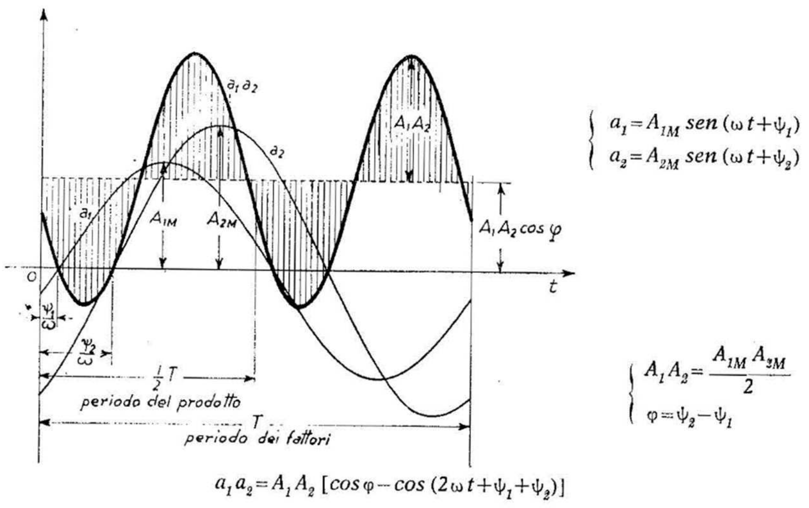



*Fig. 11 – Prodotto di due grandezze sinusoidali isofrequenziali*

Tale valore medio è diverso a seconda della differenza di fase fra i due fattori: è massimo quando questi sono in fase, cioè per $\varphi = 0$; è nullo quando questi sono in quadratura; è nullo quando questi sono in quadratura, cioè per $\varphi = \pm {}^{\pi}/_{2}$, (in tal caso il prodotto risulta una grandezza sinusoidale).

Il quoziente fra le due grandezze

$$\begin{cases} a_1 = A_{1M} \sin(\omega t + \psi_1) \\ a_2 = A_{2M} \sin(\omega t + \psi_2) \end{cases}$$

La cui differenza di fase è $\varphi = \psi_2 - \psi_1$, è dato da[3]:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{A_1}{A_2}\cos\varphi - \frac{A_1}{A_2}\sin\varphi\cot(\omega t + \psi_2)$$

Vale a dire: *il quoziente di due grandezze sinusoidali isofrequenziali è una grandezza periodica non sinusoidale che oscilla (con legge tangentoidale) attorno ad un valore medio uguale al quoziente fra i valori efficaci del dividendo e del divisore moltiplicato per il coseno dell'angolo differenza di fase tra di essi* (fig. 12).

Come nel prodotto, anche per il quoziente, tale valore medio dipende dalla differenza di fase fra i due termini; inoltre, poiché la tangentoide compie due cicli completi per ogni angolo giro dell'argomento, il periodo del quoziente è la metà del periodo dei termini.

[3] Infatti:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{A_{1M}\sin(\omega t + \psi_1)}{A_{2M}\sin(\omega t + \psi_2)} = \frac{A_1}{A_2}\frac{\sin(\omega t + \psi_2 - \varphi)}{\sin(\omega t + \psi_2)} = \frac{A_1}{A_2}\frac{\sin(\omega t + \psi_2)\cos\varphi - \cos(\omega t + \psi_2)\sin\varphi}{\sin(\omega t + \psi_2)}$$
$$= \frac{A_1}{A_2}[\cos\varphi - \sin\varphi\cot(\omega t + \psi_2)]$$

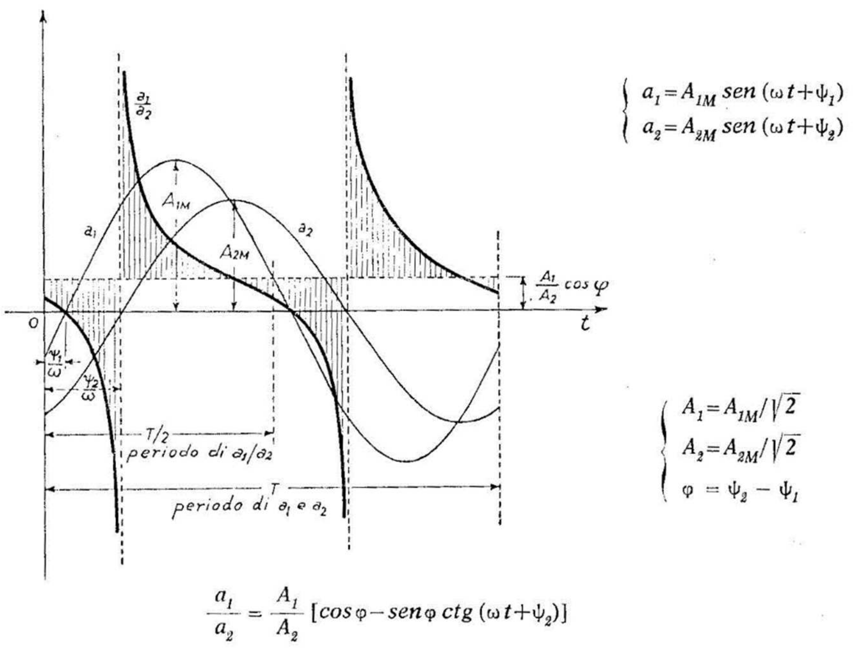



*Fig. 12 – Quoziente di due grandezze sinusoidali isofrequenziali*

La somma di due grandezze sinusoidali di *frequenza diversa*:

$$\begin{cases} a_1 = A_{1M} \sin(\omega_1 t + \psi_1) \\ a_2 = A_{2M} \sin(\omega_2 t + \psi_2) \end{cases}$$

Non è sinusoidale; essa è una grandezza periodica, la cui ampiezza vara nel tempo (fig. 13), assumendo successivamente valori massimi e minimi, con un andamento che ricorda il fenomeno dei battimenti.
Analoghe considerazioni valgono per la differenza.

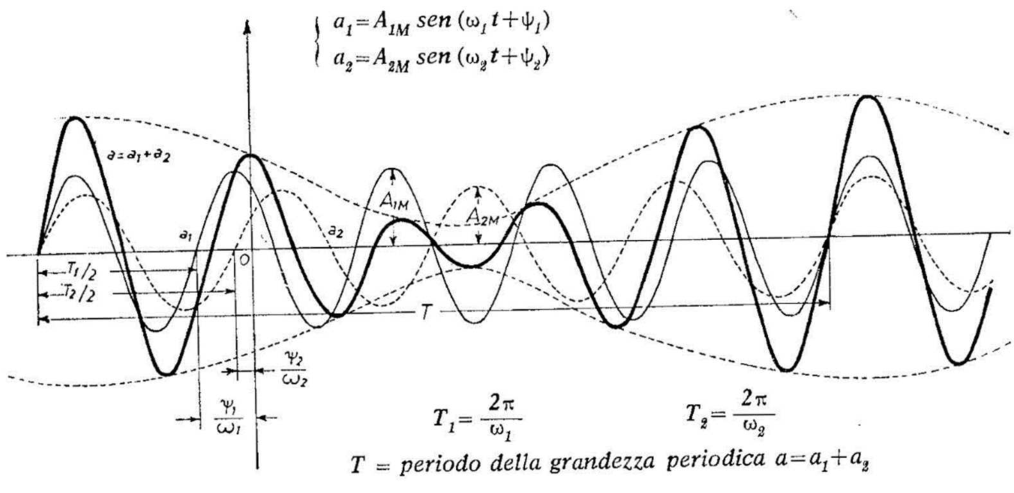



*Fig. 13 – Somma di due grandezze sinusoidali con frequenza diversa*

come per tutte le grandezze periodiche (che sono la somma di varie armoniche) il valore efficace della grandezza somma di tutte le armoniche può essere calcolato estraendo la radice quadrata della somma dei quadrati dei valori efficaci degli addendi:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \cdots}$$

Consideriamo due grandezze sinusoidali di frequenza diversa.
Scegliamo l'origine dei tempi in modo che la prima abbia fase zero ed indichiamo con $\varphi$ la differenza angolare di fase della seconda rispetto alla prima:

$$\begin{cases} a_1 = A_{1M} \sin \omega_1 t \\ a_2 = A_{2M} \sin(\omega_2 t + \varphi) \end{cases}$$

Il loro prodotto è dato da[4]:

$$a_1 a_2 = A_1 A_2 \{\cos[(\omega_1 - \omega_2)t - \varphi] - \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi]\}$$

ossia: *il prodotto di due grandezze sinusoidali di frequenza diversa può considerarsi come la somma di due grandezze sinusoidali di frequenza rispettivamente uguale alla somma ed alla differenza delle frequenze dei fattori*.
Nel caso in cui $\omega_1 = \omega_2$, la componente di frequenza uguale alla differenza, diviene un termine costante $(A_1 A_2 \cos\varphi)$ e si ritrova allora la forma già ricavata per il prodotto di due grandezze isofrequenziali.

Nello studio delle telecomunicazioni accade spesso di considerare particolari grandezze periodiche, dedotte da una grandezza sinusoidale (*grandezza portante*), di frequenza $f_0 = {}^{\omega_0}/_{2\pi}$:

$$a_0 = A_0 \sin \omega_0 t$$

la cui ampiezza A, invece che essere mantenuta costante, viene fatta variare con la legge periodica:

$$A_0(t) = A_M + B_M \sin(\omega_m t + \psi)$$

dove $f_m = {}^{\omega_m}/_{2\pi}$ è la *frequenza di modulazione*.
La grandezza risultante $a$ (*grandezza modulata in ampiezza*) è data allora da:

$$a = [A_M + B_M \sin(\omega_m t + \psi)] \sin \omega_0 t = A_M \sin \omega_0 t + \frac{B_M}{2}\{\cos[(\omega_0 - \omega_m)t - \psi] - \cos[(\omega_0 + \omega_m)t + \psi]\}$$

Essa può considerarsi, perciò, come la somma di tre grandezze sinusoidali delle quali una ha la frequenza portante $f_0$, e le altre hanno la frequenza rispettivamente uguale alla somma $f_0 + f_m$ (o*scillazione laterale superiore*) ed alla differenza $f_0 - f_m$ (o*scillazione laterale inferiore*) fra la frequenza portante $f_0$, e la frequenza di modulazione $f_m$, (fig. 14).

$$a = A_M \sin(\omega t + \psi)$$

è data da:

$$\frac{da}{dt} = \omega A_M \cos(\omega t + \psi) = \omega A_M \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

ossia: *la derivata di una grandezza sinusoidale è ancora una grandezza sinusoidale della medesima frequenza, di ampiezza ω volte maggiore ed in anticipo di fase* ${}^{\pi}/_{2}$ *rispetto alla grandezza data*.
La derivata seconda:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\omega^2 A_M \sin(\omega t + \psi)$$

ha ampiezza $\omega^2$ volte maggiore ed è in opposizione di fase con la grandezza data. In modo analogo si procede per le derivate successive.

---

[4] Infatti, ricordando che $\sin\alpha \sin\beta = {}^{1}/_{2}\,[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, e che $\frac{A_{1M} A_{2M}}{2} = A_1 A_2$, si ottiene:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= A_{1M} \sin \omega_1 t A_{2M} \sin(\omega_2 t + \varphi) = A_1 A_2 [\cos(\omega_1 t - \omega_2 t - \varphi) - \cos(\omega_1 t + \omega_2 t + \varphi)] \\ &= A_1 A_2 \{\cos[(\omega_1 - \omega_2)t - \varphi] - \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi]\} \end{aligned}$$

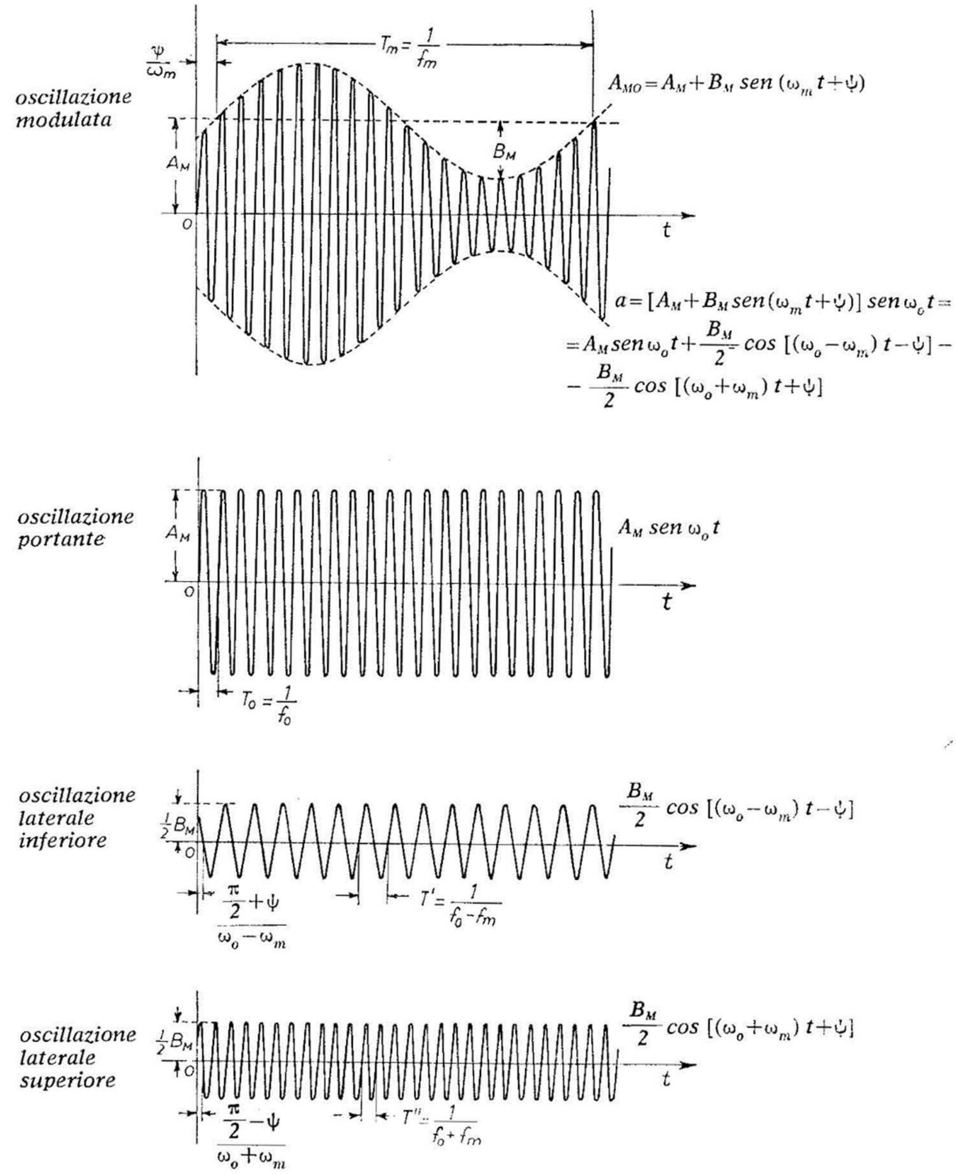



*Fig. 14 – Grandezza sinusoidale modulata in ampiezza*

Per l'integrazione di una grandezza sinusoidale, si adotta ovviamente il procedimento inverso a quello di derivazione; si ha perciò, a meno di una costante additiva:

$$\int a dt = -\frac{A_M}{\omega}\cos(\omega t + \psi) = \frac{A_M}{\omega}\sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right)$$

ossia: *l'integrale di una grandezza sinusoidale è ancora una grandezza sinusoidale della medesima frequenza, di ampiezza ω volte minore ed in ritardo di fase di $\pi/2$, rispetto alla grandezza data.*

*In conclusione possiamo affermare che le operazioni compatibili con le sinusoidi e cioè quelle operazioni fra sinusoidi che danno come risultato ancora una sinusoide, sono:*

- *Somma e sottrazione di sinusoidi isofrequenziali;*
- *Prodotto e quoziente tra costante e sinusoide;*
- *Derivata ed integrale.*

***La rappresentazione polare delle grandezze sinusoidali***
Abbiamo già avuto modo di rilevare come una grandezza variabile nel tempo con legge sinusoidale:

$$a_1 = A_{1M} \sin(\omega t + \psi_1)$$

possa identificarsi, istante per istante, colla proiezione sull'asse delle ordinate (*asse di proiezione*) di un vettore di lunghezza $A_{1M}$, ruotante intorno al polo con la velocità angolare costante $\omega$, il quale all'istante $t = 0$ abbia una direzione formante con *l'asse di riferimento* l'angolo $\psi_1$.
Pertanto, fissati l'asse di riferimento, il senso di rotazione (senso antiorario) e la velocità angola $\omega$, come già è stato messo in evidenza, *il vettore rotante definisce compiutamente la grandezza sinusoidale e può quindi essere assunto come elemento pienamente rappresentativo di essa*.
Una seconda grandezza sinusoidale, *della stessa frequenza della prima*:

$$a_2 = A_{2M} \sin(\omega t + \psi_2)$$

è analogamente rappresentabile mediante un secondo vettore rotante (fig. 15a) che abbia a comune con il primo l'origine (*polo*), attorno a cui ruoti con la stessa velocità, e che all'istante $t = 0$ abbia una direzione che forma con l'asse di riferimento l'angolo $\psi_2$.

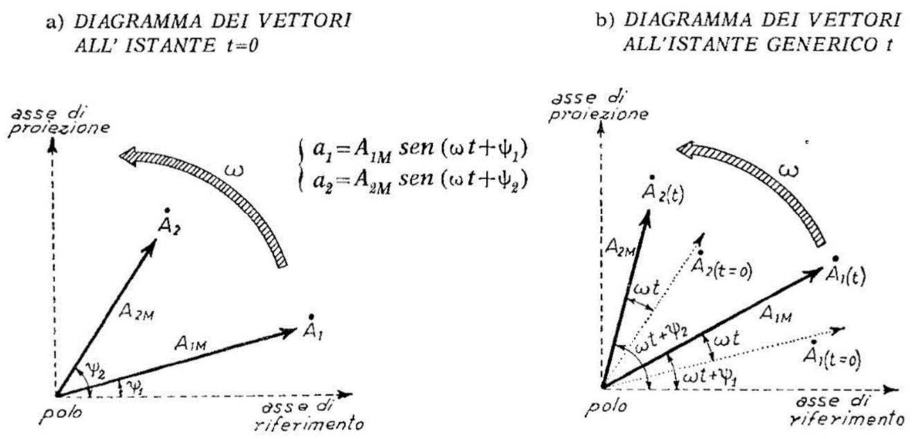



*Fig. 15 – La rappresentazione polare delle grandezze sinusoidali*

Procedendo analogamente per un numero qualsiasi di grandezze sinusoidali, *che abbiano la stessa frequenza*, si può determinare un sistema di vettori rotanti, che le rappresenta compiutamente nelle loro caratteristiche proprie e nei loro reciproci rapporti di fase.
I vettori, per quanto detto, ruotano tutti con la stessa velocità e quindi mantengono costante, durante la rotazione, la reciproca posizione geometrica. *Si può quindi immaginare di fermare il complesso dei vettori ad un istante qualsiasi, scelto a nostro arbitrio, ed assumere la posizione che essi hanno in quell'istante, come elemento rappresentativo della corrispondente grandezza sinusoidale*.
Il diagramma dei vettori che ne risulta, si chiama comunemente *diagramma polare* dei vettori.
Quando si immagina di fermare il complesso dei vettori rotanti all'istante $t = 0$ (fig.15 a), i vettori risultano distribuiti nel piano secondo direzioni che formano con l'asse di riferimento angoli uguali al rispettivo angolo di fase.
Quando invece s'immagina di fermare i vettori all'istante generico $t$ (fig. 15 b), ciascuno di essi risulta spostato, rispetto all'asse di riferimento, dell'angolo $\psi + \omega t$, uguale al proprio angolo di fase $\psi$, aumentato dell'angolo $\omega t$ del quale ha ruotato durante il tempo $t$.
I vettori dei diagrammi polari così costituiti, hanno ovviamente un significato diverso da ·quelli comunemente usati nello studio delle grandezze fisiche. Infatti, mentre questi rappresentano grandezze definite da una intensità una direzione ed un senso, i vettori del nostro diagramma, invece, *rappresentano convenzionalmente grandezze scalari variabili nel tempo con legge sinusoidale*.
Pertanto, per distinguerli dai primi, che usualmente vengono indicati con una lettera maiuscola sormontata da una piccola freccia ($\vec{A}$), li indicheremo mediante una lettera maiuscola sormontata da un punto ($\dot{A}$).

La rappresentazione polare delle grandezze sinusoidali è valida, evidentemente, purché siano verificate le condizioni in base alle quali è stata convenzionalmente stabilita la corrispondenza fra le grandezze stesse ed i rispettivi vettori rotanti; cioè purché:

- i vettori rotanti ruotino tutti con la stessa velocità angolare $\omega$ (vale a dire, le grandezze considerate siano tutte isofrequenziali);
- i vettori vengano fermati tutti nello stesso istante (cioè, per tutte le grandezze considerate venga fissata una stessa origine dei tempi).

Quando tali condizioni risultano verificate, la rappresentazione polare si presta alla facile esecuzione di alcune fondamentali operazioni matematiche sulle grandezze sinusoidali. Si dimostra infatti che, eseguendo sui vettori (secondo modalità che verranno nel seguito stabilite) le operazioni di somma, differenza, derivazione e integrazione, il vettore. risultante corrisponde al risultato della stessa operazione eseguita algebricamente sulle grandezze sinusoidali.
Si deduce che il calcolo delle grandezze sinusoidali, limitatamente alle operazioni sopra menzionate, può eseguirsi disegnando i vettori delle grandezze, eseguendo le operazioni su questi e ricavando infine, dal vettore risultante, la grandezza sinusoidale che costituisce il risultato delle operazioni.
E necessario però aver sempre presente i limiti di validità della rappresentazione polare e dei calcoli che con essa possono essere eseguiti, al fine di non incorrere nell'errore di usarla impropriamente.
Ad esempio, *non avrebbe alcun senso l'esecuzione mediante il calcolo polare, del prodotto e del quoziente di due grandezze sinusoidali*, perché, com'è noto i risultati di tali operazioni non sono, grandezze sinusoidali e non possono quindi avere alcuna corrispondenza con vettori rotanti.
Date due grandezze sinusoidali:

$$\begin{cases} a_1 = A_{1M}\sin(\omega t + \psi_1) \\ a_2 = A_{2M}\sin(\omega t + \psi_2) \end{cases}$$

se ne tracciano i rispettivi vettori rotanti, $\dot{A}_1$ e $\dot{A}_2$ (fig. 16) e si compongono graficamente, con la regola del parallelogrammo, ricavando il vettore somma $\dot{A}_\Sigma = \dot{A}_1 + \dot{A}_2$ ed il vettore differenza $\dot{A}_\Delta = \dot{A}_1 - \dot{A}_2$.

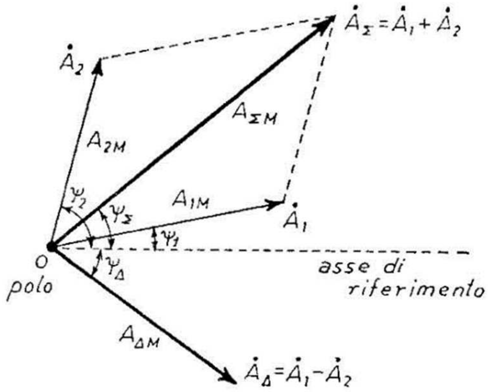



*Fig. 16 – Somma e differenza di grandezze mediante il calcolo polare*

La lunghezza e la fase di $\dot{A}_\Sigma$ e $\dot{A}_\Delta$ sono allora rispettivamente l'ampiezza e la fase delle grandezze sinusoidali somma e differenza delle grandezze date:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = A_\Sigma\sin(\omega t + \psi_\Sigma) \\ a_1 - a_2 = A_\Delta\sin(\omega t + \psi_\Delta) \end{cases}$$

L'estrema semplicità del procedimento giustifica il larghissimo uso che se ne fa, nel calcolo dei circuiti a corrente alternata, tutte le volte che si debbono effettuare somme o differenze di grandezze sinusoidali isofrequenziali.
Naturalmente, esso possiede il difetto, comune a tutti i procedimenti grafici, di fornire risultati di limitata approssimazione; per tale ragione viene usato spesso, nella pratica, accompagnato da calcoli analitici.

Una grandezza sinusoidale:

$$a = A_M \sin(\omega t + \psi)$$

ha per derivata, come si è visto:

$$\frac{da}{dt} = \omega A_M \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Perciò, nella rappresentazione polare, *la derivata, di una grandezza sinusoidale si ricava moltiplicando la lunghezza del vettore per ω e ruotandone la direzione in anticipo di un angolo retto* (fig. 17).

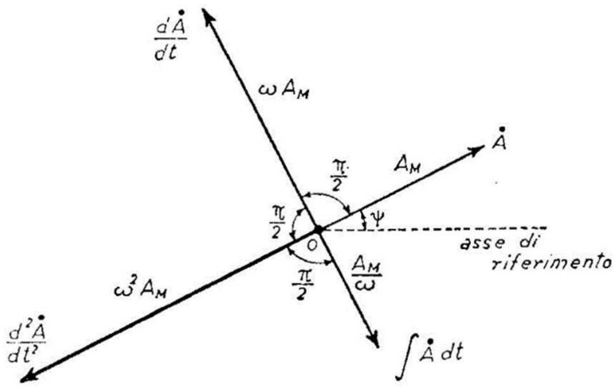



*Fig. 17 – Derivazione e integrazione di una grandezza mediante il calcolo polare*

La derivata seconda si deduce, allora, moltiplicando la lunghezza del vettore per $\omega^2$ e ruotandolo in anticipo di 180°. In analogo modo si ricavano le derivate successive.
Per il calcolo dell'integrale si adotta ovviamente il procedimento inverso; ossia: l'integrale di una grandezza sinusoidale si ricava dividendo la lunghezza del vettore per $\omega$ e ruotandolo in ritardo di un angolo retto (fig. 17).

***La rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali***

Poiché nella rappresentazione polare tutti i vettori hanno l'origine nel polo comune, ad ognuno di essi corrisponde uno ed un sol punto del piano (l'estremo terminale della freccia) e ad ogni punto del piano corrisponde uno ed un sol vettore.

Immaginando allora il piano del disegno come il piano di Gauss, nel quale *l'asse reale coincida con l'asse di riferimento dei vettori e l'asse immaginario coincida con l'asse di proiezione*, ogni vettore risulta compiutamente rappresentato dal numero complesso corrispondente.

E poiché ogni vettore corrisponde, secondo le convenzioni enunciate per la rappresentazione polare, ad una grandezza sinusoidale, può stabilirsi in conseguenza anche una *corrispondenza biunivoca fra grandezze sinusoidali e numeri complessi*, nella quale, ad ogni grandezza sinusoidale corrisponde uno ed un sol numero complesso e, viceversa, ad ogni numero complesso corrisponde una ed una sola grandezza sinusoidale.

Si istituisce così una nuova forma di rappresentazione delle grandezze sinusoidali (che non è altro che la traduzione in forma analitica della rappresentazione polare) che viene comunemente denominata *rappresentazione simbolica.*

Essa è valida, ovviamente, quando sono verificate le condizioni di validità della rappresentazione polare e la sua possibilità di impiego ha gli stessi limiti di quella.

Se ci si riferisce alla posizione che i vettori rotanti hanno all'istante $t = 0$, una grandezza sinusoidale:

$$v = V_M \sin(\omega t + \psi)$$

Corrisponde, nella rappresentazione polare, ad un vettore $\dot{V}$ (fig. 18a) di lunghezza $V_M$, che forma con l'asse di riferimento l'angolo $\psi$.

Perciò nella rappresentazione simbolica, $v$ corrisponde al numero complesso:

$$\dot{V} = a + jb$$

dove $j$, com'è noto, è l'unità immaginaria $\left(j = \sqrt{-1}\right)$ e $a$ e $b$ sono:

$$\begin{cases} a = V_M \cos \varphi \\ b = V_M \sin \varphi \end{cases}$$

e perciò:

$$\dot{V} = V_M \cos \varphi + jV_M \sin \varphi$$

Il coefficiente dell'immaginario, per la convenzione stabilita, esprime evidentemente il valore istantaneo della grandezza sinusoidale all'istante $t\ = 0$.

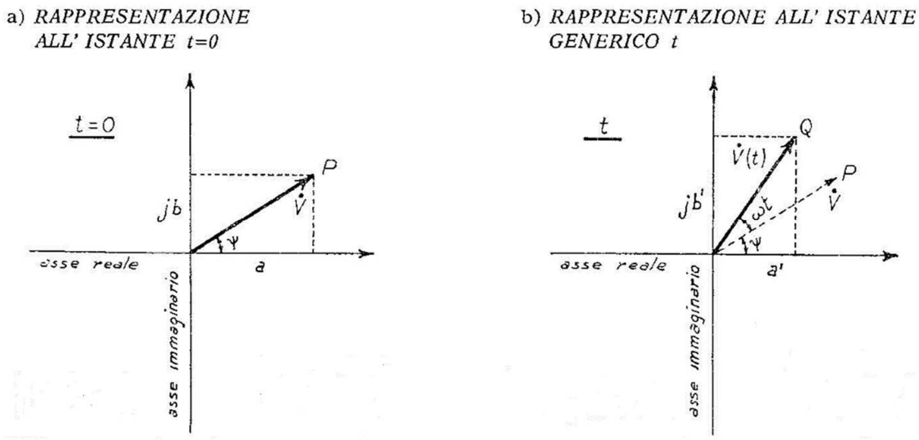



*Fig. 18 – La rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali*

Viceversa, dato il numero complesso $a + jb$, corrispondente al vettore $\dot{V}$:

$$\dot{V} = a + jb$$

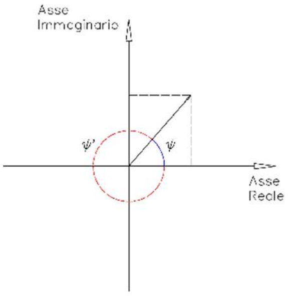
esso individua una grandezza sinusoidale $v$, che ha rispettivamente per ampiezza $V_M$ e per fase $\psi$:

$$\begin{cases} V_M = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \psi = \tan^{-1} \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

e perciò:

$$v = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(\omega t + \tan^{-1} \frac{b}{a}\right)$$

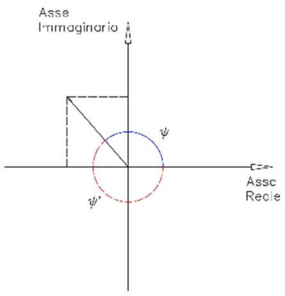
Per il calcolo dell'angolo di fase $\psi$, occorre porre molta attenzione al quadrante in cui è posizionato il vettore rotante, infatti:




*I Quadrante:* $\dot{A} = a + jb \quad a > 0, \ b > 0$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$
$$\psi' = \pi + \tan^{-1} \frac{b}{a}$$
$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \psi) \quad anticipo$$
$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t - \psi') \quad ritardo$$

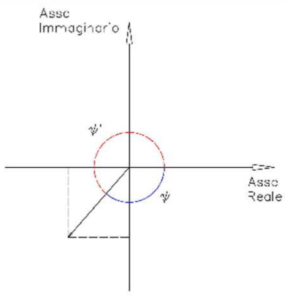
---




*II Quadrante:* $\dot{A} = -a + jb \quad a < 0, \ b > 0$

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{a}{b}$$
$$\psi' = \pi + \tan^{-1} \frac{b}{a}$$
$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \psi) \quad anticipo$$
$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t - \psi') \quad ritardo$$

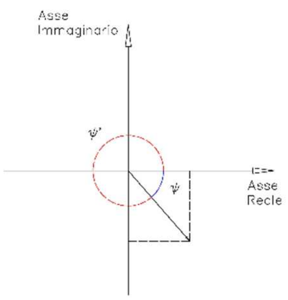
---




*III Quadrante:* $\dot{A} = -a - jb \quad a < 0, \ b < 0$

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{b}{a}$$
$$\psi' = \pi + \tan^{-1} \frac{b}{a}$$
$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \psi') \quad anticipo$$
$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t - \psi) \quad ritardo$$

---




*IV Quadrante:* $\dot{A} = a - jb \quad a > 0, \ b < 0$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$
$$\psi' = \frac{3}{2}\pi + \tan^{-1} \frac{a}{b}$$
$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \psi') \quad anticipo$$
$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t - \psi) \quad ritardo$$

Nella rappresentazione simbolica, istituita riferendoci alla posizione che i vettori hanno t=0 (fig.18a), essendo $\omega t = 0$, non compare nel numero complesso la pulsazione $\omega$, la quale quindi si sottintende nota ed uguale per tutte le grandezze che si considerano.
Quando invece è utile che nella espressione complessa compaia esplicitamente $\omega$, ci si riferisce alla posizione che i vettori hanno all'istante generico $t$, in corrispondenza del quale ciascuno di essi forma, con l'asse di riferimento, l'angolo $\psi + \omega t$, (fig. 18b).
Allora la parte reale $(a')$ ed il coefficiente dell'immaginario $(b')$ del numero complesso corrispondente alla grandezza sinusoidale $v = V_M \sin(\omega t + \psi)$, sono:

$$\begin{cases} a'(t) = V_M \cos(\omega t + \psi) \\ b'(t) = V_M \sin(\omega t + \psi) \end{cases}$$

e perciò il numero complesso assume la forma:

$$\dot{V}'(t) = a'(t) + jb'(t) = V_M \cos(\omega t + \psi) + jV_M \sin(\omega t + \psi)$$

Esso risulta adesso espresso in funzione del tempo $t$ e contiene in forma esplicita la pulsazione $\omega$.
Il coefficiente dell'immaginario, essendo la proiezione del vettore sull'asse immaginario, che abbiamo identificato con l'asse di proiezione dei vettori rotanti, esprime ovviamente il valore istantaneo della grandezza sinusoidale.
Data la grandezza sinusoidale:

$$v = V_M \sin(\omega t + \psi)$$

la sua rappresentazione simbolica (all'istante $t = O$ od all'istante generico $t$) espressa dal numero complesso nella sua forma canonica:

$$\begin{cases} \dot{V} = V_M \cos\psi + jV_M \sin\psi \\ \dot{V}(t) = V_M \cos(\omega t + \psi) + j\, V_M \sin(\omega t + \psi) \end{cases}$$

si dice *forma canonica o trigonometrica* della rappresentazione simbolica.
Il numero complesso, però, può essere espresso, com'è noto, anche sotto altra forma. Infatti, ricordando la formula di Eulero:

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j \sin\alpha$$

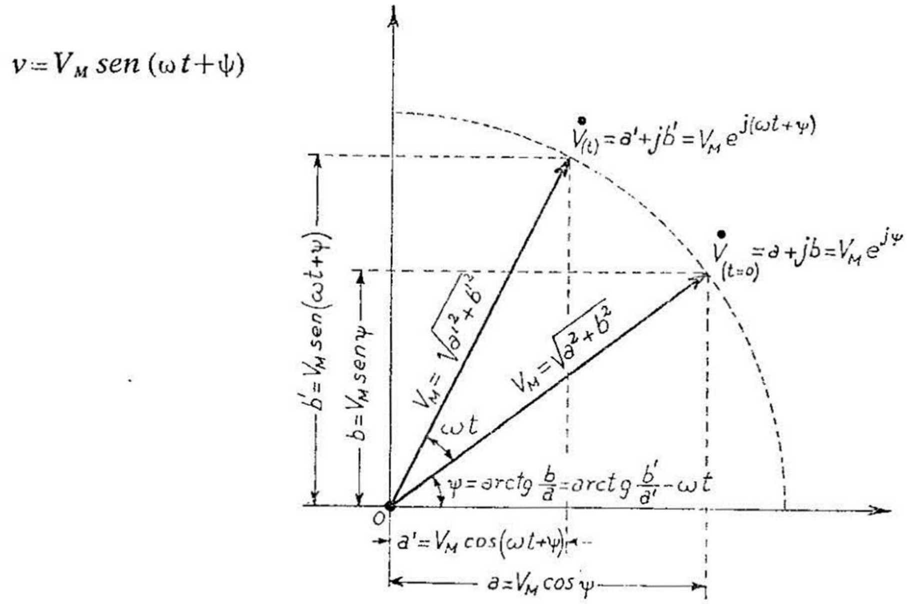
si ha:

$$\begin{cases} \dot{V} = V_M e^{j\psi} & per\ t = 0 \\ \dot{V}(t) = V_M e^{j(\omega t + \psi)} & per\ t\ generico \end{cases}$$

Questa seconda formula, che nella pratica offre una grande utilità per talune operazioni di calco, viene denominata *forma esponenziale* della rappresentazione simbolica.
Nella figura 19 sono sinteticamente riassunte le relazioni fra i parametri delle varie forme di rappresentazione di una stessa grandezza sinusoidale, sia col riferimento all'istante $t = O$, che col riferimento all'istante generico $t$.
La rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali, essendo la traduzione in termini analitici della rappresentazione polare, è valida solo quando risultano verificate le condizioni di validità di quella; ossia:

- quando le grandezze considerate sono isofrequenziali;
- quando le grandezze sono riferite ad una stessa origine dei tempi

Anche per ciò che riguarda il calcolo delle grandezze sinusoidali mediante la rappresentazione simbolica, valgono ovviamente gli stessi limiti di possibilità di impiego già enunciati per la rappresentazione polare
Pertanto, la somma, la differenza, la derivata e l'integrale di grandezze sinusoidali, possono eseguirsi, col metodo simbolico, sostituendo alle grandezze date le espressioni complesse (sotto forma canonica od esponenziale); eseguendo le operazioni secondo le comuni regole del calcolo dei numeri complessi, e ricavando infine dal risultato la grandezza sinusoidale corrispondente.
Il calcolo simbolico, comportando una serie di operazioni su numeri complessi, risulta più laborioso ad eseguirsi, del procedimento grafico richiesto dal calcolo polare.




| | *Forma canonica* | *Forma esponenziale* |
|---|---|---|
| *Riferita all'istante* $t = 0$ | $\dot{V} = V_M \cos\psi + jV_M \sin\psi$ | $\dot{V} = V_M e^{j\psi}$ |
| *Riferita all'istate generico* $t$ | $\dot{V}(t) = V_M \cos(\omega t + \psi) + j\, V_M \sin(\omega t + \psi)$ | $\dot{V}(t) = V_M e^{j(\omega t+\psi)}$ |

*Fig. 19 – Le forma della rappresentazione simbolica*

La somma e la differenza fra grandezze sinusoidali isofrequenziali si effettua molto semplicemente, col calcolo simbolico, usando la forma trigonometrica.
Infatti, date due (o più) grandezze sinusoidali di ugual frequenza:

$$\begin{cases} v_1 = V_{1M} \sin(\omega t + \psi_1) \\ v_2 = V_{2M} \sin(\omega t + \psi_2) \end{cases}$$

rappresentabili simbolicamente sotto la forma:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = V_{1M} \cos\psi_1 + jV_{1M} \sin\psi_1 = a_1 + jb_1 \\ \dot{V}_2 = V_{2M} \cos\psi_2 + jV_{2M} \sin\psi_2 = a_2 + jb_2 \end{cases}$$

è facile rilevare che (fig. 20) la somma o la differenza fra di esse si effettua eseguendo la somma o la differenza fra i corrispondenti numeri complessi che li rappresentano:

$$\begin{cases} \dot{V}_\Sigma = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \\ \dot{V}_\Delta = \dot{V}_1 - \dot{V}_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2) \end{cases}$$

Quindi, le_ grandezze sinusoidali somma ($v_\Sigma = v_1 + v_2$) o differenza ($v_\Delta = v_1 - v_2$) delle grandezze date, hanno rispettivamente per ampiezza:

$$\begin{cases} V_{\Sigma M} = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \\ V_{\Delta M} = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \end{cases}$$

e per fase:

$$\begin{cases} \psi_\Sigma = \tan^{-1} \dfrac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} \\ \psi_\Delta = \tan^{-1} \dfrac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \end{cases}$$

La forma esponenziale non offre invece utilità pratica per queste operazioni.

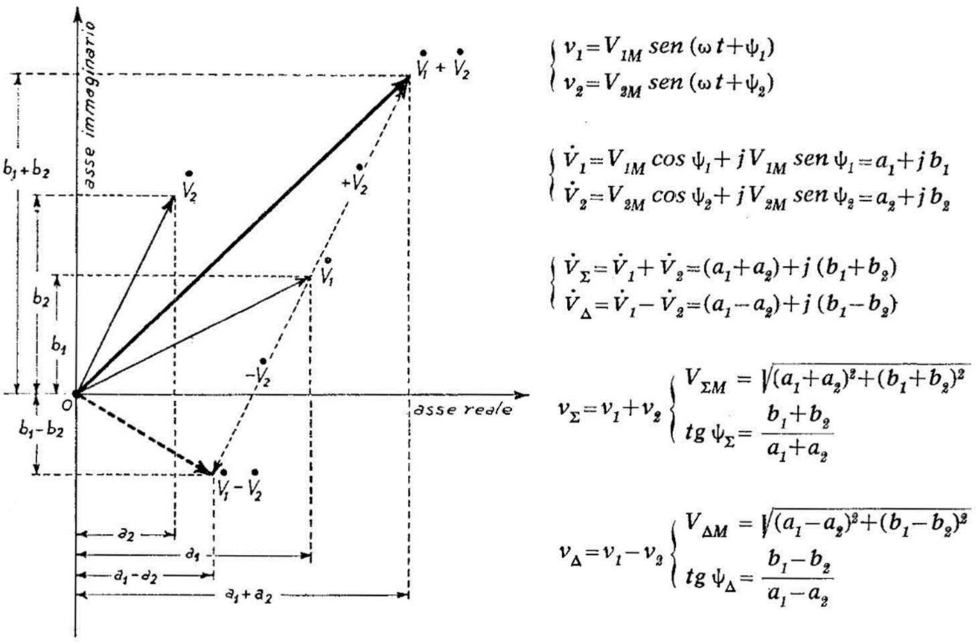



*Fig. 20 – Somma e differenza di grandezze sinusoidali isofrequenziali col calcolo simbolico*

Per eseguire il prodotto o il quoziente di una grandezza sinusoidale per uno scalare $k$, come si è visto, basta moltiplicare o dividere per $k$ la sua ampiezza; quindi, nella rappresentazione simbolica:

- per la forma trigonometrica, si moltiplica o si divide per $k$ la parte reale e il coefficiente dell'immaginario;
- per la forma esponenziale, si moltiplica o si divide per $k$ il coefficiente dell'esponenziale

$$\begin{cases} k(a + jb) = ka + jkb \\ \frac{a+jb}{k} = \frac{a}{k} + j\frac{b}{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} k(Ae^{j\alpha}) = (kA)e^{j\alpha} \\ \frac{Ae^{j\alpha}}{k} = \left(\frac{k}{A}\right) e^{j\alpha} \end{cases}$$

Come è stato precedentemente rilevato, dividendo fra loro due grandezze sinusoidali, si ottiene per quoziente una grandezza che non è più sinusoidale.
Perciò, dividendo fra loro i numeri complessi rappresentativi di due grandezze sinusoidali, il quoziente che si ricava, considerato come simbolo complesso di una grandezza sinusoidale, non ha ovviamente alcun significato relativamente all'operazione effettuata.
Esso tuttavia acquista un particolare interesse, nel calcolo dei circuiti a corrente alternata, se gli si attribuisce un significato diverso.
Consideriamo, infatti, due grandezze sinusoidali isofrequenziali ed esprimiamole con i loro simboli complessi nella forma esponenziale riferita all'istante generico $t$:

$$\begin{cases} \dot{A}_1(t) = A_{1M} e^{j(\omega t + \psi_1)} \\ \dot{A}_2(t) = A_{2M} e^{j(\omega t + \psi_2)} \end{cases}$$

Indicando con $\varphi = \psi_2 - \psi_1$ la loro differenza di fase e con $Z$ il rapporto fra i due valori massimi (od anche fra i valori efficaci), si ha:

$$\frac{\dot{A}_2(t)}{\dot{A}_1(t)} = \frac{A_{2M}e^{j(\omega t+\psi_2)}}{A_{1M}e^{j(\omega t+\psi_1)}} = Ze^{j\varphi}$$

vale a dire, *il quoziente fra i simboli complessi di due grandezze variabili sinusoidalmente nel tempo con la stessa frequenza, è un numero complesso costante*.
Tale numero complesso, espresso sotto la forma esponenziale, ha per modulo il rapporto dei moduli dei simboli delle grandezze sinusoidali $\left(Z = {}^{A_{2M}}/_{A_{1M}}\right)$ e per argomento la differenza degli argomenti ($\varphi = \psi_2 - \psi_1$), ossia la differenza di fase fra le due grandezze.
Inversamente, dalla relazione precedente si deduce:

$$(Ze^{j\varphi})\dot{A}_1 = (Ze^{j\varphi})A_{1M}e^{j(\omega t+\psi_1)} = (ZA_{1M})e^{j(\omega t+\psi_1+\varphi)}$$

Vale a dire, moltiplicando un numero complesso costante, di modulo $Z$ e di argomento $\varphi$, per il simbolo complesso di una grandezza sinusoidale, di modulo $A_{1M}$ e di argomento $\omega t + \psi_1$, si ottiene il simbolo complesso di un'altra· grandezza sinusoidale, isofrequenziale con la prima, che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.
In altre parole, il numero complesso costante $Ze^{j\varphi}$, considerato come fattore moltiplicativo da applicarsi ai simboli complessi delle grandezze sinusoidali, ha il significato di un *operatore* che ha la proprietà di moltiplicare per $Z$ l'ampiezza della grandezza e di ruotarne la fase in anticipo dell'angolo $\varphi$ (fig. 21a). Se invece viene applicato come divisore, divide per $Z$ l'ampiezza della grandezza e ne ruotala fase in ritardo dell'angolo $\varphi$.

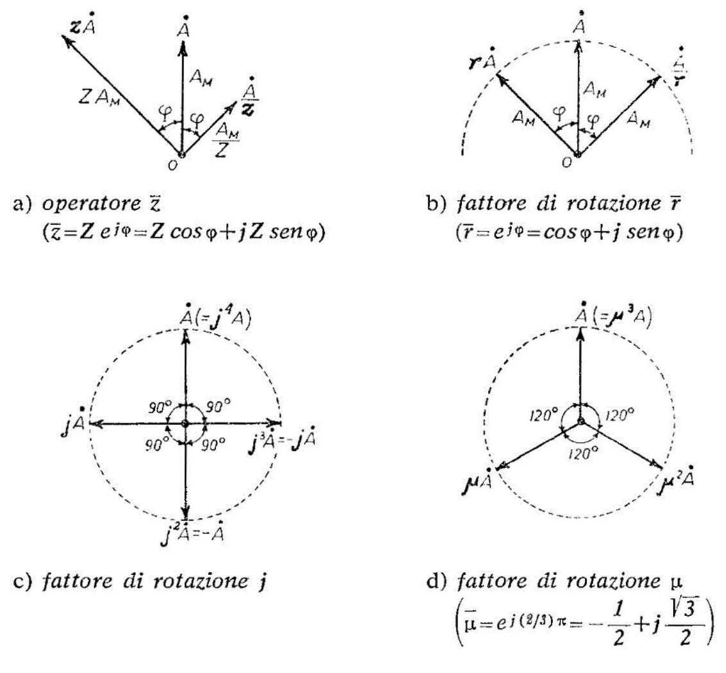



*Fig. 21 – Operatori complessi*

I numeri complessi costanti, ai quali viene attribuito tale significato, sono chiamati *operatori complessi* e vengono comunemente indicati, per distinguerli dai simboli complessi rappresentativi di grandezze sinusoidali, mediante lettere in grassetto oppure sopralineate.

Anche gli operatori complessi possono essere espressi sia nella forma esponenziale, sia nella forma canonica:

$$\begin{cases} \bar{Z} = Ze^{j\varphi} \\ \bar{Z} = x + jy \end{cases}$$

dove evidentemente:

$$\begin{cases} x = Z\cos\varphi \\ y = Z\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \\ Z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Ponendo $Z = 1$, si ha l'operatore complesso:

$$\bar{r} = e^{j\varphi}$$

che, moltiplicato per il simbolo complesso di una grandezza sinusoidale, lo trasforma nel simbolo complesso di una seconda grandezza sinusoidale, isofrequenziale con la prima, di uguale ampiezza e spostata in anticipo di fase di un angolo $\varphi$, rispetto ad essa (fig. 21 b):

$$\bar{r}\dot{A} = e^{j\varphi}A_M e^{j(\omega t+\psi)} = A_M e^{j(\omega t+\psi+\varphi)}$$

Esso quindi è un operatore moltiplicativo che, lasciando. Immutata l'ampiezza delle grandezze, ne ruota la fase in anticipo dell'angolo $\varphi$; perciò viene chiamato comunemente *fattore di rotazione*.
Il fattore di rotazione assume una forma particolarmente semplice, quando l'angolo $\varphi$ è retto o è un multiplo dell'angolo retto.
Infatti, ponendo $\varphi = {}^{\pi}/_{2}$ ed applicando la formula di Eulero, ha:

$$e^{j\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j$$

Cioè: *moltiplicando per j il simbolo complesso di una grandezza sinusoidale, la sua ampiezza rimane immutata e la sua fase viene spostata in quadratura in anticipo* (fig.21c).
Analogamente, per gli angoli di $180^0$, $270^0$ e $360^0$·si ha:

$$\begin{cases} e^{j\pi} = -1 \\ e^{j(3/2\pi)} = -j \\ e^{j2\pi} = 1 \end{cases}$$

Nel calcolo dei circuiti trifasi, incontreremo frequentemente il fattore di rotazione:

$$\bar{\alpha} = e^{j(2/3\pi)}$$

che opera sulle grandezze sinusoidali uno spostamento in anticipo di $120^0$ (fig. 21d);· a sua espressione canonica è:

$$\bar{\alpha} = e^{j(2/3\pi)} = \cos\frac{2}{3}\pi + j\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il prodotto ed il quoziente del simbolo complesso di una grandezza sinusoidale per un operatore complesso, si eseguono, nella maniera più comoda, usando la forma esponenziale dei numeri complessi:

$$\begin{cases} \bar{Z}\dot{A} = Ze^{j\varphi}A_M e^{j(\omega t+\psi)} = ZA_M e^{j(\omega t+\psi+\varphi)} \\ \dfrac{\dot{A}}{\bar{Z}} = \dfrac{A_M e^{j(\omega t+\psi)}}{Ze^{j\varphi}} = \dfrac{A_M}{Z}e^{j(\omega t+\psi-\varphi)} \end{cases}$$

la forma canonica, alla quale in taluni casi è necessario ricorrere, richiede un calcolo più laborioso:

$$\begin{cases} \bar{Z}\dot{A} = (x + jy)(a + jb) = (ax - by) + j(ay + bx) \\ \dfrac{\dot{A}}{\bar{Z}} = \dfrac{a + jb}{x + jy} = \dfrac{(a + jb)(x - jy)}{x^2 + y^2} = \dfrac{ax + by}{x^2 + y^2} + j\dfrac{bx - ay}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

che conduce, ovviamente, ad un identico risultato.

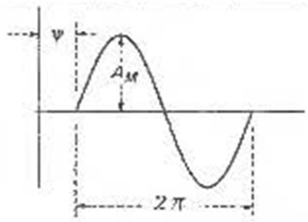
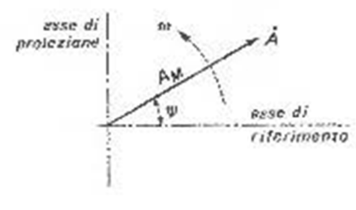
Anche le operazioni di derivazione ed integrazione si eseguono, nel modo più agevole, usando la forma esponenziale dei simboli complessi delle grandezze sinusoidali:

$$\begin{cases} \dfrac{d\dot{A}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[A_M e^{j(\omega t + \psi)}\right] = j\omega A_M e^{j(\omega t + \psi)} = j\omega\dot{A} \\ \displaystyle\int \dot{A}dt = \int A_M e^{j(\omega t + \psi)} = \frac{1}{j\omega} A_M e^{j(\omega t + \psi)} = \frac{\dot{A}}{j\omega} = -j\frac{\dot{A}}{\omega} \end{cases}$$

giungendo così alle identiche conclusioni già ricavate mediante le altre rappresentazioni; ossia, che la derivata r rispetto al tempo, di una grandezza sinusoidale si deduce dalla grandezza data, moltiplicando l'ampiezza per $\omega$ e ruotandone la fase in anticipo di $90^0$; l'integrale si deduce dalla grandezza data, dividendone l'ampiezza per $\omega$ e spostandone la fase di $90^0$ in ritardo.

Per ricapitolare le varie rappresentazioni delle grandezze sinusoidali, riportiamo la figura seguente:

**Forme di rappresentazione delle grandezze sinusoidali**

| | |
|---|---|
| Parametri della grandezza | Ampiezza $A_M$<br>Pulsazione $\omega$<br>Angolo di fase $\psi$ |
| Rappresentazione algebrica | $a(t) = A_M \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$ |
| Rappresentazione cartesiana |  $T = \frac{2\pi}{\omega}$, |
| Rappresentazione polare (*la frequenza è una costante sottintesa nei calcoli*) |  |
| Rappresentazione simbolica (*la frequenza è una costante sottintesa nei calcoli*) | $\dot{A} = A_M(\cos\psi + j\operatorname{sen}\psi)$ |

*Sommario*