UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Equazioni di Maxwell

Anno Accademico 2020-2021

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:
Lezioni di Elettrotecnica Generale *- Giulio Battistini*
Colombo Cursi Pisa
Web: *http://www.ba.infn.it/~depalma/lezioni/equazMaxwell.pdf*
Video online: *https://www.youtube.com/watch?v=KJ7-ajQK1nw*

1. Equazioni di Maxwell

1.2 Caso di fenomeni statici o stazionari

Esaminiamo il caso in cui si abbia a che fare con fenomeni statici o stazionari, per esempio:

- cariche elettriche ferme in determinati punti dello spazio che generano nello spazio circostante un campo elettrico costante nel tempo, chiamato anche campo elettrostatico in quanto generato da cariche elettriche ferme (***fenomeni statici***);
- moti di cariche con velocità costante e quindi moti che costituiscono delle correnti elettriche stazionarie (correnti continue) che generano nello spazio circostante un campo magnetico statico (***fenomeni stazionari***).

Tutti i fenomeni legati a queste situazioni possono essere descritti attraverso queste quattro equazioni:

$$\begin{cases} \phi_{S_{Chiusa}}(\vec{E}) = \dfrac{\sum Q_{interne}}{\varepsilon_0} & \text{Teorema di Gauss per il campo elettrico} \quad (1) \\ \Lambda_L(\vec{E}) = 0 & \text{Teorema di Ampere per il campo elettrico} \quad (2) \end{cases}$$

Queste prime due si riferiscono solo al campo elettrico generato da cariche elettriche ferme o cariche che non subiscono accelerazioni, moto stazionario.

$$\begin{cases} \phi_{S_{Chiusa}}(\vec{B}) = 0 & \text{Teorema di Gauss per il campo magnetico} \quad (3) \\ \Lambda_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 \displaystyle\sum_1^n I_{conc} & \text{Teorema di Ampere per il campo magnetico} \quad (4) \end{cases}$$

Queste ultime due riguardano solo il campo magnetico generato da magneti permanenti fermi o da correnti elettriche stazionarie, continue.

Tutte e quattro le equazioni sono le equazioni di Maxwell in condizioni stazionarie.

In queste equazioni non ci sono indicazioni sul fatto che i fenomeni legati al campo elettrico ed i fenomeni legati al campo magnetico in qualche modo debbano essere correlati, l'unica correlazione visibile in queste equazioni riguarda la corrente elettrica (equazione 4) che come noto, è generata da cariche elettriche in movimento e le cariche sono responsabili della generazione del campo elettrostatico (equazione 1)

1.3 Caso di fenomeni variabili nel tempo

Esistono però fenomeni che mettono in evidenza la correlazione esistente fra la fenomenologia riguardante il campo elettrico e la fenomenologia riguardante il campo magnetico.

Il primo fenomeno è *l'induzione elettromagnetica* e sappiamo che in presenza di campo magnetico variabile concatenato con un circuito, nel circuito stesso si induce una f.e.m pari a:

$$e = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

Possiamo quindi apportare una modica all'equazione 2 che dice che la circuitazione del campo elettrico è uguale a zero ma solo in presenza di fenomeni statici. Lungo una linea di un circuito (la circuitazione si calcola lungo una linea chiusa) la circuitazione non è altro che la somma delle d.d.p. calcolate lungo la linea e quindi essendoci ora la f.e.m indotta, dovuta a campi magnetici variabili, vorrà dire che la circuitazione del campo elettrico può non essere nulla, si può quindi avere una corrente indotta; ma la corrente indotta è dovuta ad un campo elettrico indotto nel circuito ed infatti l'equazione 2 diventa:

$$\Lambda_L(\vec{E}) = e = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} \quad \text{Legge di Farady} - \text{Newmann}$$

Questa è la prima equazione che scriviamo in cui campo elettrico e campo magnetico sono presenti contemporaneamente, un campo magnetico variabile nel tempo può generare un campo elettrico. *E questa equazione ci dice anche che il campo elettrico in presenza di fenomeni non stazionari (generatori) non è un campo conservativo.*

Un altro fenomeno in cui, di nuovo, vengono mescolati campo elettrico e campo magnetico riguarda la cosiddetta *corrente di spostamento*.

In questo caso l'equazione da considerare è la numero 4, circuitazione del campo magnetico:

$$\Lambda_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 \sum_1^n I_{conc}$$

Anche qui occorre aggiungere un termine che tenga conto di situazioni che non siano stazionarie, che ci siano cioè campi elettrici o campi magnetici che cambiano nel tempo.

Esaminiamo il caso di un condensatore ad armature piane, figura 1, alimentato da un circuito in cui è presente un generatore di f.e.m variabile nel tempo, per esempio sinusoidale

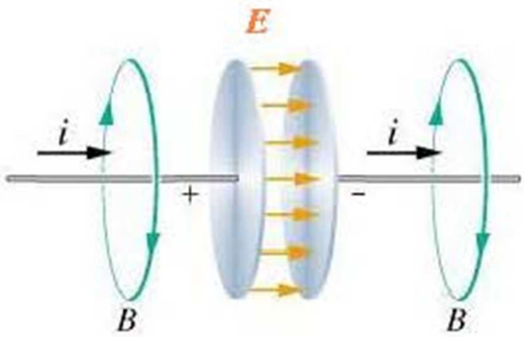


Figura 1

Questo significa che le armature del condensatore vengono caricate in modo alternato, una volta l'armatura di sinistra è positiva e la destra negativa, passato un semiperiodo l'armatura di sinistra è negativa e quella di destra positiva, in modo periodico le armature vengono caricate con segno diverso.

Nei conduttori di collegamento del condensatore al circuito esterno scorre una corrente elettrica (*corrente di conduzione*) variabile nel tempo che è responsabile della generazione di un campo magnetico $\vec{B}$, se scegliamo una linea, quella a sinistra, ed andiamo a calcolare la circuitazione del campo magnetico, ovviamente sulla base della legge di Ampere, otteniamo un valore della circuitazione proporzionale al valore della corrente elettrica che scorre nel tratto di circuito. Se ora inserissimo un ago magnetico nella zona vicina al condensatore, ci accorgeremmo che l'ago magnetico tende ad orientarsi indicandoci quindi la presenza di un campo magnetico anche all'interno del dielettrico. Nel dielettrico è sicuramente presente un campo elettrico $\vec{E}$ dovuto al fatto che le armature vengono caricate, questo campo elettrico ha una intensità variabile nel tempo esattamente come cambia nel tempo la d.d.p. tra le armature e lo stesso campo elettrico si inverte periodicamente, una volta diretto verso destra ed una volta verso sinistra.
Se un ago magnetico, che non può risentire in alcun modo del campo elettrico, si orienta in questa regione di spazio, vuol dire che anche qui è presente un campo magnetico. Questo campo magnetico quindi è presente anche laddove non abbiamo un conduttore percorso da corrente che lo genera. Quindi anche laddove abbiamo un condensatore e cioè dove il circuito è interrotto e non abbiamo direttamente un passaggio di corrente, si ha un campo magnetico.
Con riferimento sempre alla figura 1, Maxwell ha fatto questo ragionamento, se la circuitazione del campo magnetico calcolata lungo una linea chiusa presa a sinistra della figura deve essere diversa da zero, se la stessa circuitazione calcolata lungo la linea a destra deve essere anche essa diversa da zero, come fa la circuitazione ad essere zero (non ci sono correnti concatenate) nel dielettrico? La presenza della orientazione dell'ago magnetico in questa regione dimostra che anche tra le armature del condensatore è presente un campo magnetico e quindi la sua circuitazione non può sempre essere zero anche lungo una linea chiusa presa in una regione in cui non c'è una corrente elettrica concatenata.
Per risolvere il problema, Maxwell ha aggiunto un termine alla legge di Ampere, equazione 4, che a questo punto è chiamata legge di Ampere-Maxwell, e cioè la circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa presa dove non ci sono correnti concatenate (per esempio all'interno del dielettrico), deve essere uguale non solo a $\mu_0 \sum_1^n I_{conc}$ ma dobbiamo immaginare che laddove non ci siano vere correnti elettriche ci siano concatenate correnti di altro tipo. Maxwell ha introdotto il concetto di *corrente di spostamento*, questa corrente è determinata da un termine dovuto al fatto che nella regione del dielettrico è presente un campo elettrico variabile nel tempo, prendendo una linea chiusa all'interno del dielettrico individuiamo una superficie racchiusa dalla linea ed attraversata dal campo elettrico quindi il flusso del campo elettrico attraverso la superficie cambia nel tempo per il semplice fatto che sta cambiando nel tempo il campo elettrico.

Maxwell ha legato il termine mancante proprio alla variazione nel tempo del flusso del campo elettrico concatenato con la linea chiusa.

Sempre con riferimento alla figura 1 possiamo scrivere:

$$V(t) = \vec{E}(t)d \qquad \text{e} \qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

d distanza tra le armature ed S superficie delle armature

ancora

$$q(t) = CV(t) = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\vec{E}(t)d = \varepsilon_0 S\vec{E}(t)$$

da cui

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{d\left(\varepsilon_0 S\vec{E}(t)\right)}{dt} = \varepsilon_0\frac{dS\vec{E}(t)}{dt} = \varepsilon_0\frac{d\phi(\vec{E})}{dt}$$

dove

$\phi(\vec{E}) = S\vec{E}$ è il flusso del campo elettrico attraverso la superficie pari all'area delle armature.

Il termine $\varepsilon_0 \frac{d\phi_E(t)}{dt}$ ha le dimensioni di una corrente

$$\frac{C^2}{m^2 N}\frac{\left(\frac{N}{C}\right)m^2}{S} = \frac{C^2 N}{NCS} = \frac{C}{S} = A$$

Questa corrente è chiamata *corrente di spostamento*.

$$i_s = \varepsilon_0\frac{d\phi(\vec{E})}{dt}$$

Quindi l'equazione 4 diventa:

$$\Lambda_\gamma(\vec{B}) = \mu_0\sum_1^n I_{conc} + \mu_0\varepsilon_0\frac{d\phi(\vec{E})}{dt} \quad \mathit{Legge\ di\ Ampere - Maxwell}$$

Anche questa equazione comprende il campo magnetico ed il campo elettrico insieme, esattamente come l'equazione

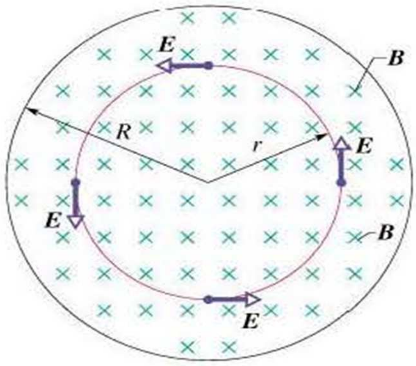
$$\Lambda_L(\vec{E}) = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

Da questa equazione capiamo che il campo elettrico, in queste condizioni, non è più conservativo e le sue linee di forza sono linee chiuse.

La legge di Ampere-Maxwell ci dice che tanto le correnti stazionarie reali quanto le correnti di spostamento e cioè le variazioni del campo elettrico rispetto al tempo, possono generare un campo magnetico.
Le correnti stazionarie generano un campo magnetostatico, i campi elettrici variabili nel tempo, invece, determinano il campo magnetico in situazioni non stazionarie.
In definitiva possiamo affermare, dalle precedenti due equazioni, che variazioni nel tempo di un campo elettrico possono generare un campo magnetico, variazioni nel tempo del campo magnetico possono generare un campo elettrico.

Facciamo due esempi:

***Esempio 1*: Campo E indotto generato da campo $\vec{B}(t)$ a simmetria cilindrica (Legge di Faraday - Newmann)**
Assumiamo un campo $\vec{B}(t)$, perpendicolare ed entrante nel foglio, con modulo variabile nel tempo e confinato in una regione cilindrica infinita di raggio R. Sia $\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = cost > 0$.
Per la legge di Faraday - Newmann $\Lambda_L(\vec{E}) = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$, si creerà un campo $\vec{E}(t)$. Questo deve avere linee di campo chiuse e dovrà conservare la simmetria cilindrica: le linee di campo devono essere delle circonferenze concentriche con l'asse del cilindro e punti equidistanti dall'asse del cilindro devono avere lo stesso valore del campo.



Il verso delle linee di campo è fissato dalla Legge di Lentz (per $cost > 0$ ovvero B aumenta)

Applichiamo la legge di Faraday - Newmann, scegliendo una linea γ di raggio r coincidente con una linea di campo:

a) $\boldsymbol{r < R}$

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_\gamma E \cdot dl \cos 0 = \int_\gamma E \cdot dl = E \int_\gamma dl = E2\pi r$$

$$-\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d(\pi r^2 B)}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Uguagliando si ha

$E2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$ da cui $E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$

b) $\boldsymbol{r > R}$

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_\gamma E \cdot dl \cos 0 = \int_\gamma E \cdot dl = E \int_\gamma dl = E2\pi r$$

$$-\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d(\pi R^2 B)}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

Uguagliando si ha

$E2\pi r = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$ da cui $E = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$

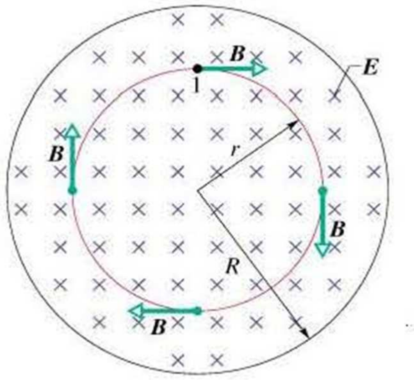
c) $\boldsymbol{r = R}$

$$E = -\frac{R}{2}\frac{dB}{dt}$$

***Esempio 2*: Campo B generato da campo $\vec{E}(t)$ a simmetria cilindrica (Legge di Ampere - Maxwell)**

Assumiamo un campo $\vec{E}(t)$, perpendicolare ed entrante nel foglio, con modulo variabile nel tempo e confinato in una regione cilindrica infinita di raggio R. Sia $\frac{d\vec{E}(t)}{dt} = cost > 0$.

Per la legge di Ampere - Maxwell $\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt}$, si creerà un campo $\vec{B}(t)$. Questo deve avere linee di campo chiuse e dovrà conservare la simmetria cilindrica: le linee di campo devono essere delle circonferenze concentriche con l'asse del cilindro e punti equidistanti dall'asse del cilindro devono avere lo stesso valore del campo.



Il verso delle linee di campo è fissato dalla regola della mano destra (per $cost > 0$ ovvero E aumenta)

Applichiamo la legge di Ampere - Maxwell, scegliendo una linea γ di raggio r coincidente con una linea di campo:

a) $\boldsymbol{r < R}$

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt}$$

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_\gamma B \cdot dl \cos 0 = \int_\gamma B \cdot dl = B \int_\gamma dl = B2\pi r$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d(\pi r^2 E)}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

Uguagliando si ha

$B2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$ da cui $B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{r}{2}\frac{dE}{dt}$

b) $\boldsymbol{r > R}$

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt}$$

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_\gamma B \cdot dl \cos 0 = \int_\gamma B \cdot dl = B \int_\gamma dl = B2\pi r$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d(\pi R^2 E)}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$$

Uguagliando si ha

$B2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$ da cui $B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{R^2}{2r} \frac{dE}{dt}$

c) $\boldsymbol{r = R}$

$$B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{R}{2} \frac{dE}{dt}$$

Riassumendo quindi, le equazioni di Maxwell sono:

$$\begin{cases} \phi_{S_{Chiusa}}(\vec{E}) = \frac{\sum Q_{interne}}{\varepsilon_0} & \textit{Teorema di Gauss per il campo elettrico} \quad (1) \\ \Lambda_L(\vec{E}) = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} & \textit{Legge di Farady} - \textit{Newmann} \quad (2) \\ \phi_{S_{Chiusa}}(\vec{B}) = 0 & \textit{Teorema di Gauss per il campo magnetico} \quad (3) \\ \Lambda_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 \sum_1^n I_{conc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt} & \textit{Legge o Teorema di Ampere} - \textit{Maxwell} \quad (4) \end{cases}$$

Queste equazioni, chiaramente, le possiamo anche scrivere nella seguente forma:

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{interne}}{\varepsilon_0} & \textit{Teorema di Gauss per il campo elettrico} \ (\textit{L'origine di } \vec{E} \textit{ sono le cariche elettriche}) \\ \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} & \textit{Legge di Farady} - \textit{Newmann} \ (\vec{E} \text{ è } \textit{creato anche da } \vec{B}(t)) \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 & \textit{Teorema di Gauss per il campo magnetico} \ (\textit{Non esistono cariche magnetiche}) \\ \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_1^n I_{conc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt} & \textit{Legge o Teorema di Ampere} - \textit{Maxwell} \\ & (\textit{L'origine di } \vec{B} \textit{ sono sia le correnti, sia } \vec{E}(t)) \end{cases}$$

Se scriviamo le quattro equazioni precedenti per uno spazio vuoto dove non ci sono né cariche elettriche ($Q = 0$), né correnti ($I = 0$) otteniamo delle equazioni completamente simmetriche:

$$(1)\quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad\qquad (3)\quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$(2)\quad \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} \qquad\qquad (4)\quad \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt}$$

Esse dicono che:

- un campo $\vec{B}(t)$ genera, tramite l'equazione 2, un campo $\vec{E}(t)$, che genera, tramite l'equazione 4, un campo $\vec{B}(t)$ etc. etc.

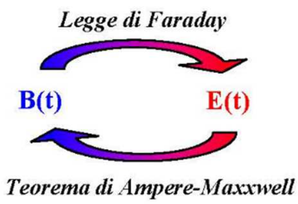


Figura 2

I campi, quindi, si autogenerano ed autosostengono.

- I campi $\vec{E}(t)$ e $\vec{B}(t)$ hanno entrambi linee chiuse.

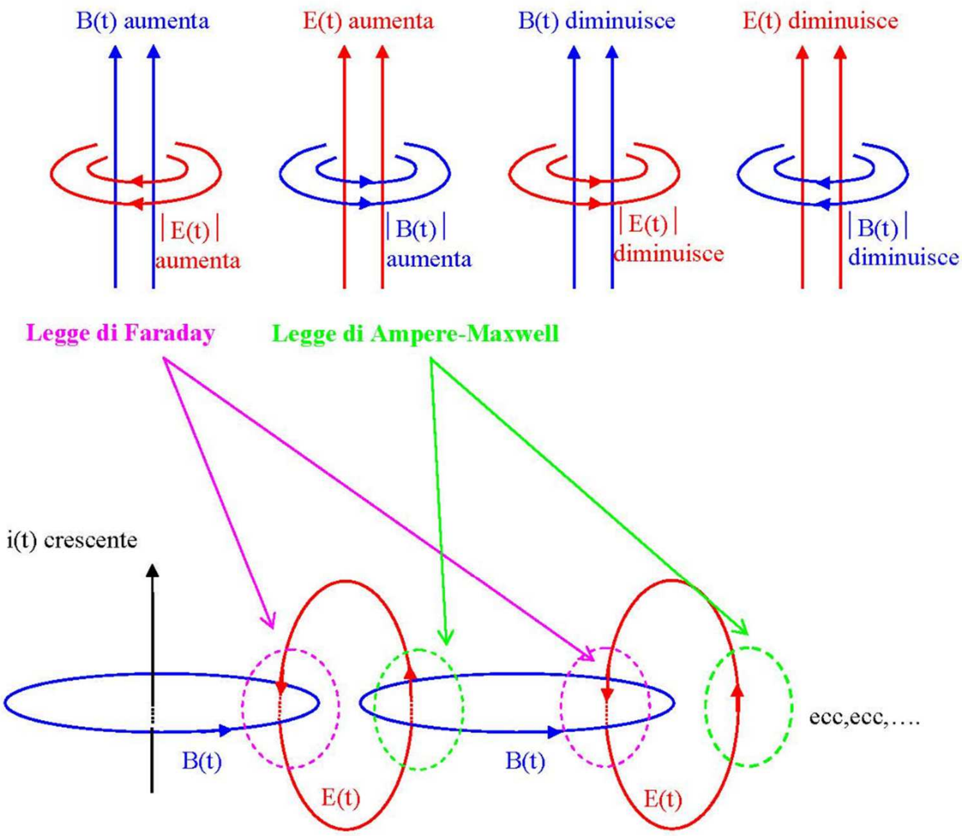


Figura 3

Questa nuova realtà fatta di campi $\vec{E}(t)$ e $\vec{B}(t)$ che esistono nello spazio vuoto, che si autogenerano e autosostengono, sono le ***onde elettromagnetiche***.

Sommario