UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica II

I Circuiti in Regime Transitorio

Anno Accademico 2020-2021

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:
Circuiti Elettrici *- Charles K. Alexander, Matthew N. O. Sadiku*
McGraw-Hill
Lezioni di Elettrotecnica Generale *- Giulio Battistini*
Colombo Cursi Pisa
Fondamenti di teoria dei circuiti *- Charles A. Desoer, Ernest S. Kuh*
Franco Angeli
Appunti *- Corso di Campi Elettromagnetici e Circuiti I*
Prof. Luca Perregrini Università degli Studi di Pavia

Transitori
Si definisce transitorio l'intervallo di tempo necessario ad un sistema per passare da uno stato energetico iniziale (regime permanente iniziale) ad un altro (regime permanente finale). Non è comunque sempre vero che un sistema in seguito ad un transitorio ammetta regime permanente finale, infatti affinché questo si verifichi è necessario che il sistema sia *stabile*.

1 Funzioni singolari elementari o perturbazioni istantanee
Le funzioni singolari sono molto utili nell'analisi dei circuiti, rappresentano infatti delle buone approssimazioni di segnali che spesso si incontrano nei circuiti che subiscono fenomeni di commutazione.
Per definizione le ***funzioni singolari elementari*** sono funzioni discontinue o con derivate discontinue.

Le funzioni singolari elementari più utilizzate nell'analisi circuitale sono:

- il *gradino unitario*;
- l'*impulso unitario*;
- la *rampa unitaria*

La **funzione gradino unitario** $u(t)$**,** vale 0 per valori negativi di t e 1 per valori positivi di t.
In termini matematici:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases} \tag{1.1}$$

La funzione gradino unitario non è definita in $t = 0$ dove cambia istantaneamente valore da 0 a 1. È una funzione adimensionale ed il suo grafico è riportato in figura 1.

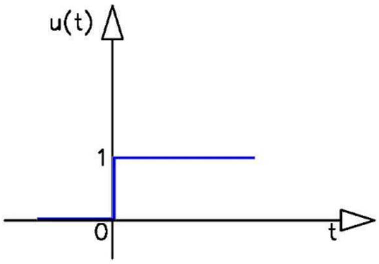


Figura 1 – Funzione gradino unitario

Se la variazione istantanea avviene invece in $t = t_0$ con $t_0 > 0$ invece che in $t = 0$, la funzione gradino unitario diventa:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t<t_0 \\ 1 & t>t_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Abbiamo cioè una $u(t)$ ritardata di t_0 secondi come mostrato in figura 2

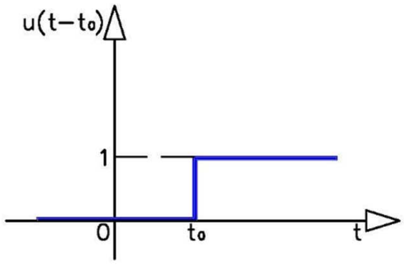


Figura 2 – Funzione gradino unitario ritardata di t_0

Per ottenere la (1.2) dalla (1.1) è sufficiente sostituire tutte le occorrenze di t con $t-t_0$. Se la variazione istantanea avviene in $t=-t_0$, la funzione gradino unitario diviene:

$$u(t+t_0)=\begin{cases}0 & t<-t_0\\ 1 & t>-t_0\end{cases} \tag{1.3}$$

E si dice che $u(t)$ è anticipata di t_0 secondi, come riportato in figura 3

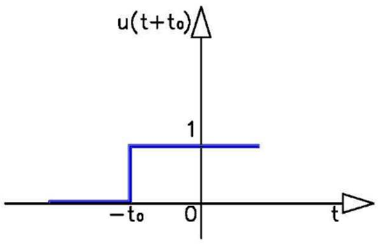


Figura 3 – Funzione gradino unitario anticipata di t_0

La funzione gradino è utilizzata per rappresentare variazioni molto rapide della tensione o della corrente. Per esempio, la tensione:

$$v(t)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ V_0 & t>t_0\end{cases} \tag{1.4}$$

Può essere espressa in termini di gradino unitario come:

$$v(t)=V_0u(t-t_0) \tag{1.5}$$

Se si pone $t_0=0$, $v(t)$ risulta semplicemente il gradino di tensione $V_0u(t)$.
Un generatore di tensione $V_0u(t)$ è riportato in figura 4a, il circuito equivalente è invece riportato in figura 4b.

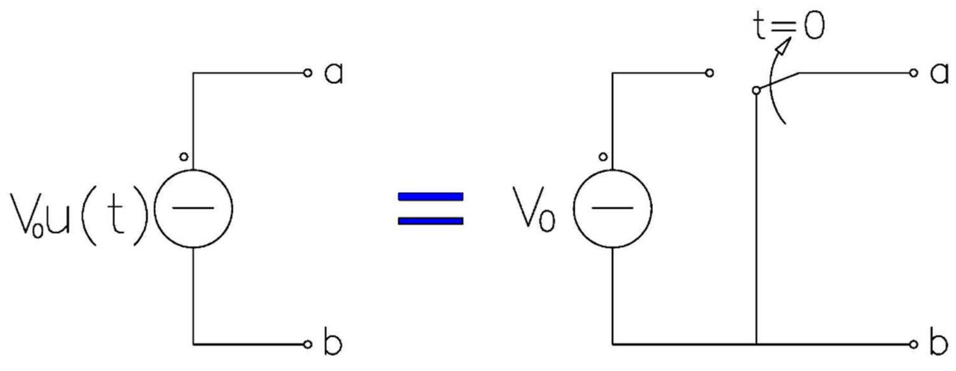
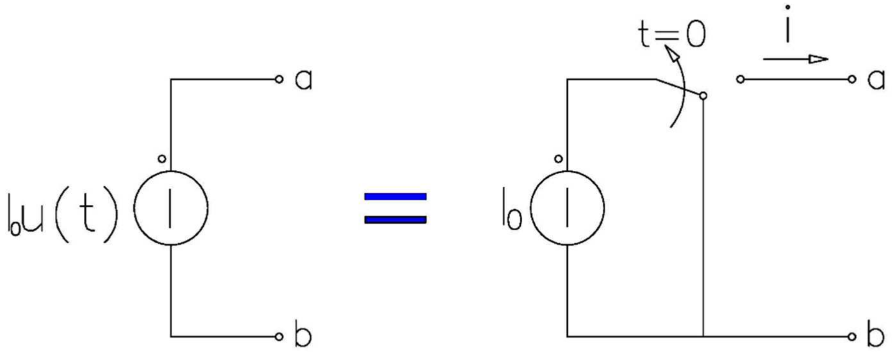


Figura 4 – Generatore di tensione $V_0u(t)$

È evidente dalla figura 4b che i morsetti a-b sono cortocircuitati per $t<0$ e che per $t>0$ agli stessi terminali compare una tensione $v=V_0$.

In modo simile in figura 5a è riportato un generatore di corrente $I_0 u(t)$ ed in figura 5b il circuito equivalente.



a) *b)*

Figura 5 – Generatore di corrente $I_0 u(t)$

Da notare che per $t < 0$ abbiamo un circuito aperto, $i = 0$, mentre per $t > 0$ scorre una corrente $i = I_0$.

La ***derivata della funzione gradino unitario è la funzione impulso unitario*** $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \frac{du(\mathrm{t})}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ indefinita, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

La funzione impulso unitario, detta anche funzione delta, è riportata in figura 6.

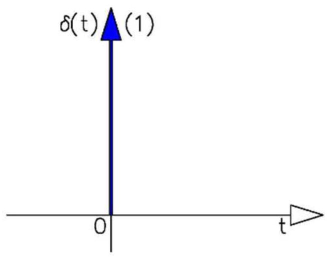


Figura 6 – Funzione impulso unitario

La funzione impulso unitario $\delta(t)$ vale zero ovunque eccetto che in $t = 0$, dove è indefinita.
L'impulso unitario può essere immaginato come un impulso di durata molto breve e di area unitaria. Questa proprietà si esprime matematicamente:

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1 \tag{1.7}$$

dove $t = 0^-$ è un istante appena prima di $t = 0$ e $t = 0^+$ un istante appena dopo. Proprio per questa proprietà è usuale scrivere un 1, che indica proprio area unitaria, a fianco della freccia che simboleggia la funzione impulso, come in figura 6.

L’area unitaria è anche detta intensità della funzione impulso. Quando una funzione impulso ha intensità diversa dall’unità, l’area dell’impulso eguaglia l’intensità. Per esempio una funzione impulso $10\delta(t)$ ha un’area pari a 10.
La figura 7 evidenzia le funzioni impulso $5\delta(t+2)$, $10\delta(t)$ e $-4\delta(t-3)$.

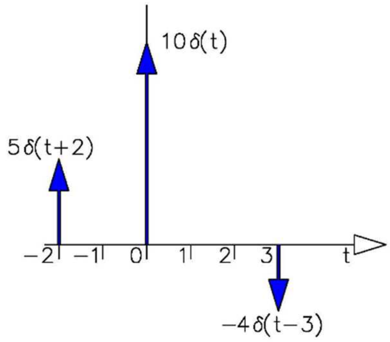


Figura 7– Tre funzioni impulso

Per vedere come la funzione impulso si combina con altre funzioni, consideriamo l’integrale:

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt \tag{1.8}$$

dove $a < t_0 < b$. Ora, poiché $\delta(t-t_0) = 0$ eccetto che in $t = t_0$, l’integrando risulta nullo ovunque tranne che in t_0. Quindi:

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_a^b f(t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_a^b \delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

cioè:

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \tag{1.9}$$

Questo risultato evidenzia che integrando il prodotto di una qualsiasi funzione per la funzione impulso, si ottiene il valore della funzione nel punto di applicazione dell’impulso. Si tratta di una proprietà molto utile dell’impulso nota come *proprietà di selezione* dell’impulso. Un caso particolare della (1.8) si ha per $t = 0$, in questo caso la (1.9) diventa:

$$\int_a^b f(t)\delta(t)dt = f(0) \tag{1.10}$$

Integrando la funzione gradino unitario $u(t)$ ***si ottiene la funzione rampa unitaria*** $r(t)$; si scrive:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t)dt = tu(t) \qquad (1.11)$$

ed anche:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t & t \ge 0 \end{cases} \qquad (1.12)$$

La funzione rampa unitaria vale zero per valori negativi di t e ha pendenza unitaria per valori positivi di t.
La figura 8 illustra la rampa unitaria. In generale è detta rampa una funzione con pendenza costante.

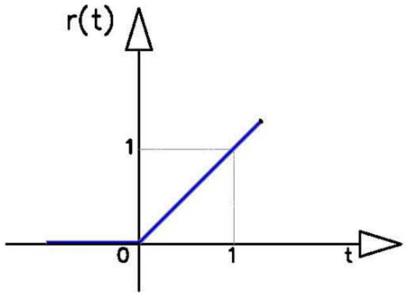


Figura 8– Funzione rampa unitaria

Anche la funzione rampa unitaria può essere ritardata, figura 9 o anticipata figura 10.

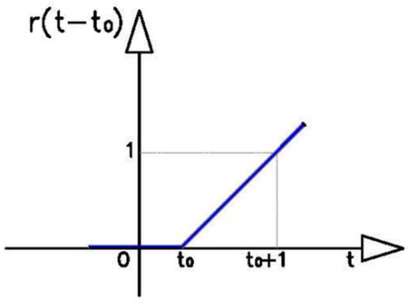


Figura 9– Rampa unitaria ritardata

Per la rampa ritardata

$$r(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t \le t_0 \\ t-t_0 & t \ge t_0 \end{cases} \qquad (1.13)$$

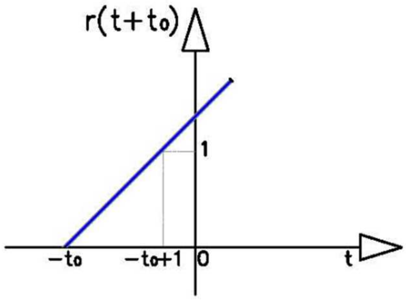


Figura 10– Rampa unitaria anticipata

Per la rampa anticipata

$$r(t+t_0)=\begin{cases}0 & t\le -t_0\\ t+t_0 & t\ge -t_0\end{cases} \tag{1.14}$$

È utile infine ricordare che le tre funzioni singolari elementari (impulso, gradino e rampa) sono legate tra loro dall'operatore derivata:

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt} \quad , \quad u(t)=\frac{dr(t)}{dt} \tag{1.15}$$

e dall'operatore integrale:

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt \quad , \quad r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(t)dt \tag{1.16}$$

Le funzioni elementari viste sono di notevole importanza, in quanto spesso permettono la scomposizione di funzioni più complesse, potrebbe comunque capitare di avere a che fare con funzioni molto complesse non facilmente scomponibili, in tal caso se è nota l'espressione analitica si potrebbe tentare di trasformare, risolvere, e antitrasformare, ma se non è nota è necessario suddividere il tempo in tanti piccoli intervalli, ed approssimare in ogni intervallino il segnale o con un impulso, o con un gradino come mostrato in fig.11, infine calcolare la risposta a tutti i gradini (o impulsi) supponendo di volta in volta che le condizioni iniziali siano nulle, successivamente sommare tutte queste risposte, l'ipotesi di condizioni iniziali nulle non porta a commettere errori, in quanto se ne tiene conto automaticamente nella somma.

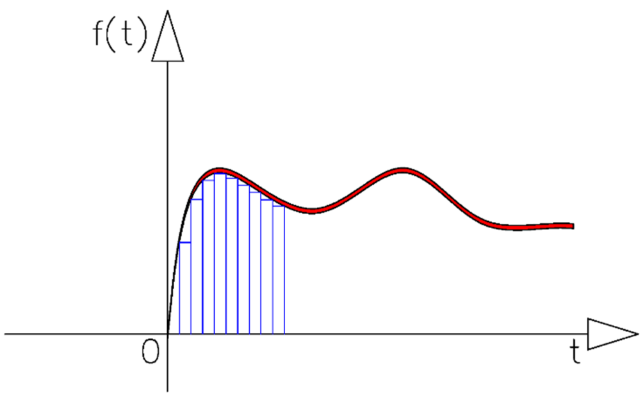


Figura 11– Perturbazione prolungata

2 Circuiti del primo ordine

Un circuito del *primo ordine* è caratterizzato da un'equazione differenziale del primo ordine.
I circuiti del primo ordine sono di due tipi: RL o RC

2.1. Risposta naturale o a ingresso nullo di un circuito RC

Si ha una risposta naturale o a ingresso nullo di un circuito RC quando il generatore che fornisce l'alimentazione viene, per qualsiasi ragione, scollegato dal circuito. L'energia già presente nel condensatore è scaricata sui resistori.
Si consideri il collegamento serie di un resistore e di un condensatore inizialmente carico, riportato in figura.

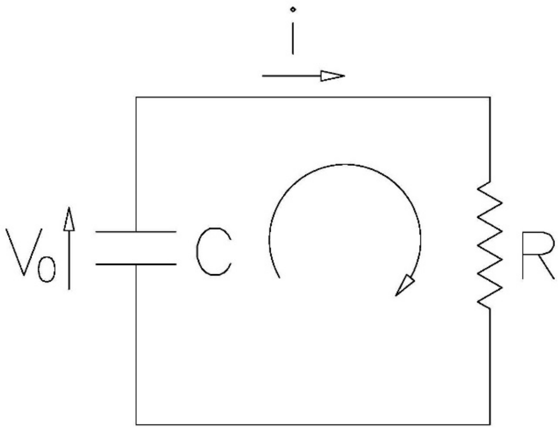


Figura 12 - Circuito RC

Si vuole determinare la risposta del circuito, cioè l'andamento della $v(t)$ ai morsetti del condensatore. Si sceglie la tensione ai morsetti del condensatore come risposta per sfruttare la proprietà della tensione sul condensatore di non poter subire variazioni istantanee.

Si dice risposta di un circuito il modo in cui il circuito reagisce a un'eccitazione.
Poiché il condensatore è inizialmente carico, la propria tensione all'istante iniziale $t = 0$ sarà:

$$v(0) = V_0 \tag{2.1}$$

Ed il valore corrispondente dell'energia immagazzinata:

$$w(0) = \frac{1}{2} C V_0^2 \tag{2.2}$$

Scrivendo l'equazione alla maglia, utilizzando il senso di percorrenza riportato in figura 1, avremo:

$$v = Ri \tag{2.3}$$

Ma $i = -C \frac{dv}{dt}$ poiché siamo in scarica, e quindi:

$$v = -RC \frac{dv}{dt} \tag{2.4}$$

Da cui:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \tag{2.5}$$

Questa è una *equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili*.

Separando le variabili abbiamo:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC}dt \tag{2.6}$$

Integrando ambo i membri si ottiene:

$$\ln v = -\frac{t}{RC} + \ln A \tag{2.7}$$

Dove A è la costante di integrazione. Ne segue:

$$\ln\frac{v}{A} = -\frac{t}{RC} \tag{2.8}$$

Eliminando il logaritmo otteniamo

$$v(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} \tag{2.9}$$

Ma, dalla condizione iniziale, $v(0) = A = V_0$. Perciò

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{2.10}$$

Questa equazione mostra che la risposta in tensione del circuito RC decresce esponenzialmente a partire dal valore della tensione iniziale. Poiché la risposta è dovuta alla energia iniziale immagazzinata nel condensatore ed alle caratteristiche fisiche del circuito, e non a generatori di tensione o corrente esterni, essa viene detta *risposta naturale del circuito*.

La ***risposta naturale o a ingresso nullo*** di un circuito rappresenta il comportamento (in termini di tensioni e correnti) intrinseco del circuito, senza l'intervento di sorgenti esterne di eccitazione.

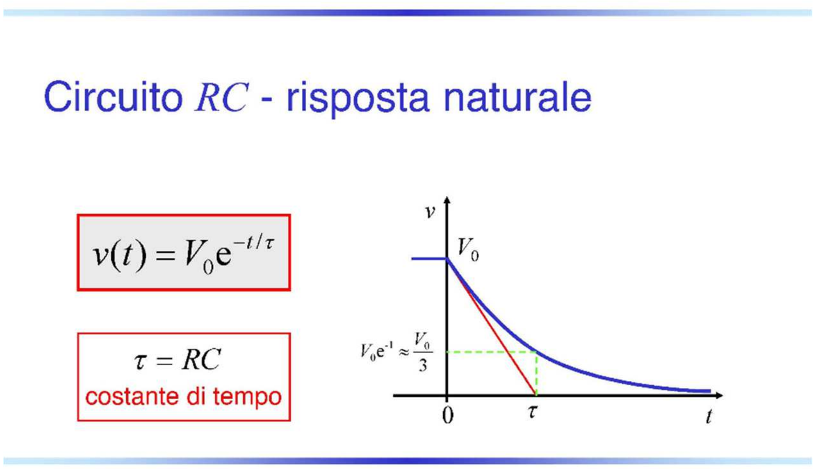


Figura 13 – Risposta in tensione del circuito RC.

La risposta naturale è riportata nella figura 13. È da notare che per $t = 0$ essa parte dal valore iniziale V_0. Al crescere di t, la tensione diminuisce tendendo a zero. La velocità con la quale la tensione decresce è espressa dalla *costante di tempo* τ.

La ***costante di tempo*** di un circuito è il tempo impiegato dalla risposta per decrescere di un fattore $\frac{1}{e}$, cioè raggiungere il 36.8 percento del proprio valore iniziale.

Ciò significa che per $t = \tau$ la (2.10) diventa:

$$V_0 e^{-\frac{\tau}{RC}} = V_0 e^{-1} = 0.368V_0$$

Cioè

$$\tau = RC \tag{2.11}$$

Ed in termini di costante di tempo, la (2.10) può essere scritta:

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.12}$$

Con l'analisi dimensionale si dimostra che τ è espressa in secondi, infatti:

$$R \to [\Omega] = \left[\frac{Volt}{Ampere}\right]$$
$$C \to [F] = \left[\frac{Coulomb}{Volt}\right] = \left[\frac{Ampere \times \text{secondo}}{Volt}\right]$$
$$\tau = RC \to \left[\frac{Volt}{Ampere}\right]\left[\frac{Ampere \times \text{secondo}}{Volt}\right] = [\text{secondo}]$$

Usando l'espressione (1.12), si può calcolare la corrente $i_R(t)$:

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.13}$$

La potenza dissipata in R è:

$$p(t) = v(t) i_R = \frac{V_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} \tag{2.14}$$

L'energia dissipata dal resistore fino all'istante t è:

$$w_R(t) = \int_0^t p\,dt = \int_0^t \frac{V_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} = -\frac{\tau V_0^2}{2R} e^{-\frac{2t}{\tau}} \Bigg|_0^t = \frac{1}{2} C V_0^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \tag{2.15}$$

Si noti che quando $t \to \infty$, $w_R(\infty) = \frac{1}{2} C V_0^2$, che coincide con $w_C(0)$, l'energia iniziale immagazzinata in C. L'energia che inizialmente era immagazzinata nel condensatore è tutta dissipata nel resistore.

Riassumendo, *le quantità da determinare per calcolare la risposta naturale di un circuito RC* sono:

- Tensione iniziale $v(0) = V_0$ ai morsetti del condensatore.
- Costante di tempo τ .

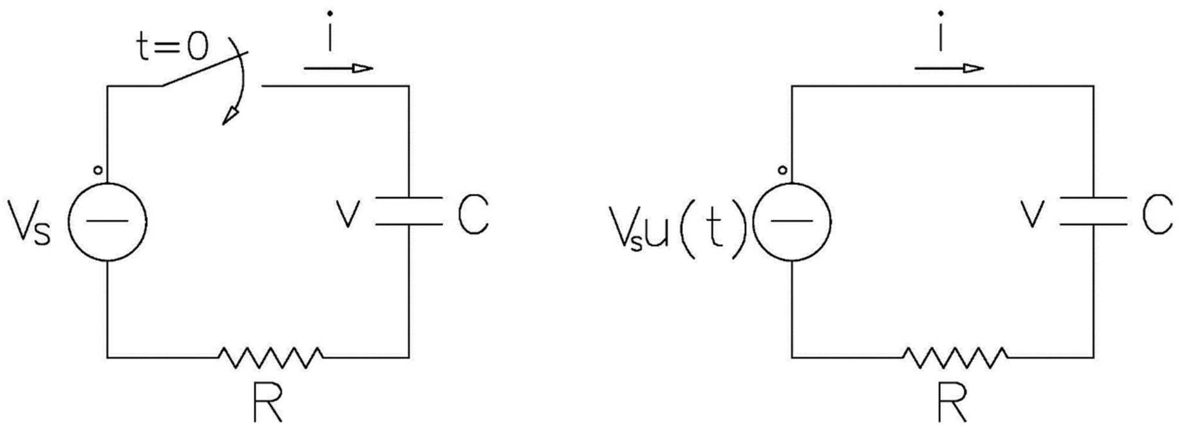
Note queste due grandezze, si ottiene la risposta in tensione del condensatore $v_C(t) = v(t) = v(0)e^{-t/\tau}$. Una volta nota la tensione sul condensatore, le altre grandezze (corrente nel condensatore i_C , tensione ai morsetti del resistore v_R e corrente nel resistore i_R) possono essere facilmente determinate.
Nell'espressione della costante di tempo $\tau = RC$, R rappresenta la resistenza equivalente di Thevenin ai morsetti del condensatore, si toglie cioè il condensatore dal circuito e si calcola $R = R_{Th}$ ai suoi morsetti.

2.2. Risposta forzata o risposta a stato zero o risposta al gradino di un circuito RC

Quando un generatore costante viene collegato improvvisamente ad un circuito RC, il generatore di tensione o di corrente, può essere modellato con una funzione a gradino, la risposta è detta *risposta al gradino*.

*La **risposta al gradino** di un circuito è il comportamento del circuito quando l'eccitazione, che può essere un generatore di tensione o di corrente, è una funzione gradino.*

La risposta al gradino è la risposta del circuito in conseguenza a una improvvisa applicazione di un generatore costante di tensione o di corrente.



a) *b)*

Figura 14 - Circuito RC con un gradino di tensione in ingresso

Si consideri il circuito RC in figura 14a che può essere sostituito con il circuito di figura 14b, dove V_S è una tensione costante nel tempo. Scegliamo come risposta la tensione sul condensatore e si supponga che la tensione iniziale sul condensatore sia V_0, anche se ciò non è necessario per avere la risposta al gradino.

Poiché la tensione ai morsetti di un condensatore non può variare in modo finito in tempi zero:

$$v(0^-) = v(0^+) = V_0 \tag{2.16}$$

Dove $v(0^-)$ è la tensione ai morsetti del condensatore appena prima della commutazione, e $v(0^+)$ la tensione appena dopo la commutazione. Scrivendo la legge alla maglia, figura 5b, abbiamo:

$$V_S u(t) - v = Ri$$

$$V_S u(t) - v = RC\frac{dv}{dt}$$

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v - V_S u(t)}{R} = 0$$

Cioè:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_S}{RC}u(t) \tag{2.17}$$

Per $t > 0$ la (2.29) diviene:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_S}{RC} \tag{2.18}$$

Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v - V_S}{RC}$$

O anche:

$$\frac{dv}{v - V_S} = -\frac{dt}{RC} \tag{2.19}$$

Integrando ambo i membri ed introducendo la condizione iniziale:

$$\ln\left(v - V_S\right)\Big|_{V_0}^{v(t)} = -\frac{t}{RC}\Big|_0^t$$

$$\ln\left[v(t) - V_S\right] - \ln\left(V_0 - V_S\right) = -\frac{t}{RC} + 0$$

O anche:

$$\ln\frac{v - V_S}{V_0 - V_S} = -\frac{t}{RC} \tag{2.20}$$

Eliminando la funzione logaritmo:

$$\frac{v - V_S}{V_0 - V_S} = e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau\text{=RC}$$

$$v - V_S = \left(V_o - V_S\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Cioè:

$$v(t) = V_S + \left(V_0 - V_S\right)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{t>0} \tag{2.21}$$

Perciò

$$v(t)=\begin{cases} V_0, & \text{t<0} \\ V_S+\left(V_0-V_S\right)e^{-\frac{t}{\tau}}, & \text{t>0} \end{cases} \tag{2.22}$$

Questa è chiamata *risposta completa* del circuito RC all'applicazione di un gradino di tensione supponendo C già carico. Supponendo $V_S > V_0$, il grafico di $v(t)$ è riportato in figura 15.

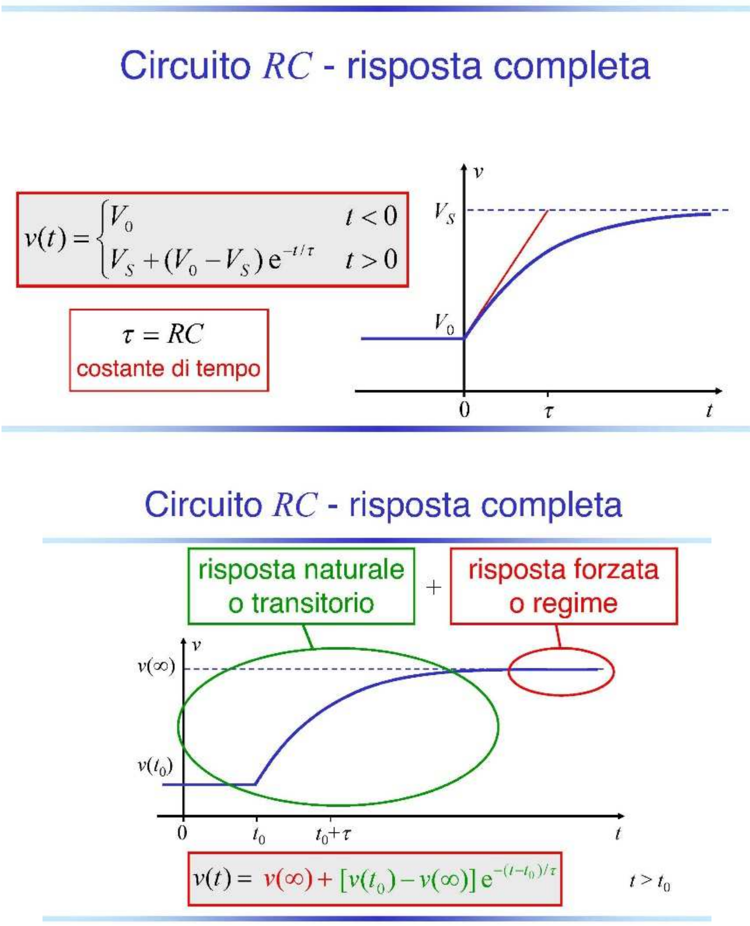


Figura 15 – Risposta al gradino di un circuito RC con condensatore inizialmente carico.

Se si suppone ora il condensatore inizialmente scarico, si pone $V_0 = 0$ nella (2.34), così che:

$$v(t)=\begin{cases} 0, & \text{t<0} \\ V_S\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right), & \text{t>0} \end{cases} \tag{2.23}$$

E, in maniera alternativa, può essere scritta:

$$v(t)=V_S\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t) \tag{2.24}$$

Questa è la risposta completa al gradino di un circuito RC con condensatore inizialmente scarico.
La corrente nel condensatore si ottiene dalla (2.35):

$$i(t) = C\frac{dv}{dt} = \frac{C}{\tau}V_S e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \text{RC}, \quad \text{t>0}$$

Oppure

$$i(t) = \frac{V_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) \tag{2.25}$$

La figura 16 mostra gli andamenti della tensione ai morsetti del condensatore $v(t)$ e della sua corrente $i(t)$.

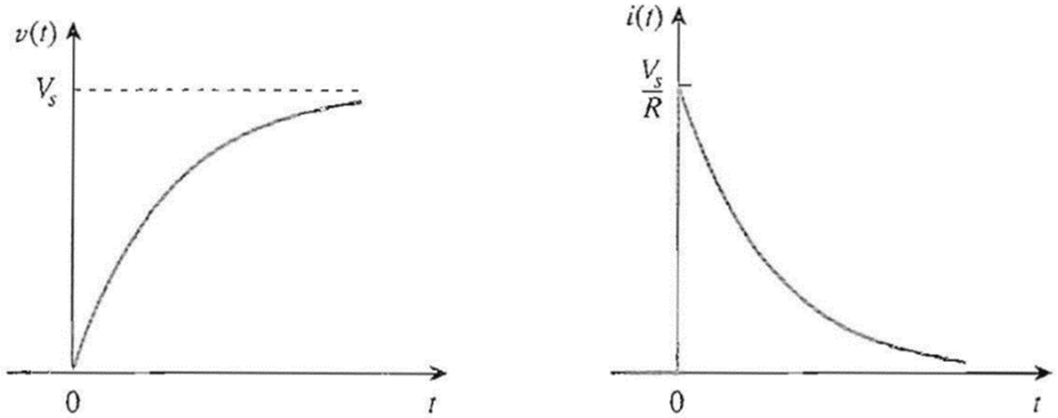


Figura 16 – Risposta al gradino di un circuito RC con condensatore inizialmente scarico.

Invece di eseguire tutti i passaggi precedenti, esiste un approccio sistematico per determinare la risposta al gradino di un circuito RC o RL. Se riprendiamo in esame la relazione:

$$v(t) = V_S + \left(V_0 - V_S\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + V_S\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \qquad \text{t>0}$$

Che è più generale della:

$$v(t) = V_S\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$$

Ci accorgiamo che la $v(t)$ e costituita da due componenti.

Esistono due modi diversi per scomporre la risposta nelle sue due componenti.

Il *primo metodo* consiste scompone la risposta in *risposta naturale più risposta forzata,* il secondo metodo invece scompone la risposta in *risposta transitoria più risposta a regime*.

Utilizzando il primo metodo è possibile scrivere la risposta completa come:

Risposta completa	**=**	***Risposta naturale*** *Energia immagazzinata*	**+**	***Risposta forzata*** *Generatore indipendente*

In altre parole

$$v = v_n + v_f \tag{2.26}$$

In cui

$$v_n = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

e

$$v_f = V_S \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

v_f è detta *risposta forzata* perché è prodotta dal circuito quando a esso è applicata una “forza” esterna. Essa rappresenta ciò che il circuito è forzato a fare dall’eccitazione in ingresso. La risposta naturale decresce nel tempo fino ad annullarsi, così come la componente transitoria della risposta forzata, lasciando quindi solo la componente di regime della risposta forzata.

Il *secondo metodo*, invece, considera la risposta completa come somma di due componenti, una *temporanea* e l’altra *permanente*, cioè:

Risposta completa	**=**	***Risposta transitoria*** *Parte temporanea*	**+**	***Risposta a regime*** *Parte permanente*

In altre parole:

$$v = v_t + v_{ss} \tag{2.27}$$

dove

$$v_t = \left(V_0 - V_S \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.28}$$

e

$$v_{ss} = V_S \tag{2.29}$$

La *risposta transitoria* o *transitorio*, v_t è temporanea; si tratta della parte della risposta completa che tende a zero al crescere del tempo. La *risposta a regime* v_{ss} è la porzione della risposta completa che permane dopo che la risposta transitoria si è esaurita.

Per cui:

- La ***risposta transitoria*** è la risposta temporanea del circuito che tende ad annullarsi al trascorrere del tempo.
- La ***risposta a regime*** è il comportamento del circuito molto tempo dopo che è stata applicata la sollecitazione esterna.

In qualunque modo si consideri, la risposta completa

$$v(t) = V_S + \left(V_0 - V_S\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Può essere scritta nella forma:

$$v(t) = v(\infty) + \left[v(0) - v(\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.30}$$

Dove $v(0)$ è la tensione iniziale a $t = 0^+$ e $v(\infty)$ il valore finale o di regime.

Per determinare la risposta completa al gradino di un circuito RC sono quindi necessarie tre informazioni:

1. La tensione iniziale sulle armature del condensatore $v(0)$.
2. La tensione finale sulle armature del condensatore $v(\infty)$.
3. La costante di tempo τ.

L'informazione 1 si determina dal circuito per $t < 0$, le quantità 2 e 3 si calcolano dal circuito per $t > 0$. Ottenuti questi elementi la risposta sarà:

$$v(t) = v(\infty) + \left[v(0) - v(\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Se l'interruttore cambia posizione all'istante $t = t_0$, invece che in $t = 0$, si ha un ritardo nella risposta, così che la (2.42) diventa:

$$v(t) = v(\infty) + \left[v(\mathrm{t}_0) - v(\infty)\right] e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} \tag{2.31}$$

dove $v(t_0)$ è il valore iniziale a $t = t_0^+$: È importante notare che la (2.42) e la (2.43) sono valide solo per la risposta al gradino, cioè quando l'ingresso è costante nel tempo.

2.3. Risposta naturale o a ingresso nullo di un circuito RL
Si consideri il collegamento serie di un resistore e di un induttore inizialmente carico, riportato in figura 17.

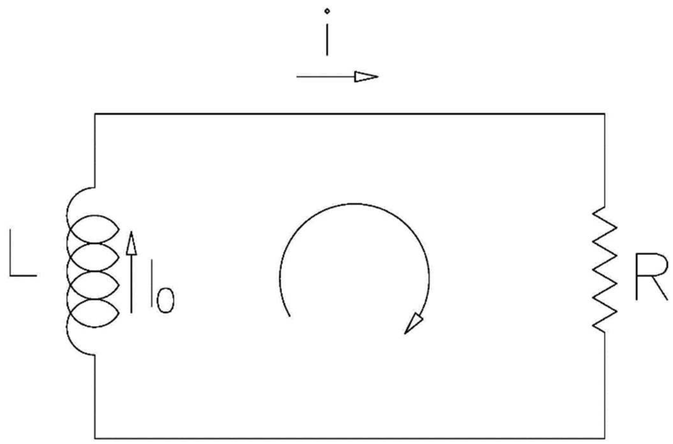


Figura 17 - Circuito RL

Si vuole determinare la risposta del circuito, cioè l'andamento della $i(t)$ che scorre nell'induttore. Si sceglie la corrente nell'induttore come risposta per sfruttare la proprietà della corrente nell'induttore di non poter subire variazioni istantanee. All'istante $t=0$, si suppone che l'induttore abbia una corrente iniziale I_0.

$$i(0)=I_0 \tag{2.32}$$

Con la corrispondente energia immagazzinata.

$$w(0)=\frac{1}{2}LI_0^2 \tag{2.33}$$

Scrivendo l'equazione alla maglia, utilizzando il senso di percorrenza riportato in figura 3, avremo:

$$-L\frac{di}{dt}=Ri \tag{2.34}$$

Cioè:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0 \tag{2.35}$$

O anche:

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0 \tag{2.36}$$

Questa è una *equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili*.

Separando le variabili ed integrando abbiamo:

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i} = -\int_0^t \frac{R}{L}\,dt$$

$$\ln i\Big|_{I_0}^{i(t)} = -\frac{Rt}{L}\Bigg|_0^t \Rightarrow \ln i(t) - \ln I_0 = -\frac{Rt}{L} + 0$$

E anche:

$$\ln\frac{i(t)}{I_0} = -\frac{Rt}{L} \tag{2.37}$$

Eliminando il logaritmo si ottiene:

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}} \tag{2.38}$$

Questa espressione dice che la risposta naturale del circuito RL decresce esponenzialmente a partire dal valore iniziale della corrente.
La risposta in corrente è riportata in figura 18.

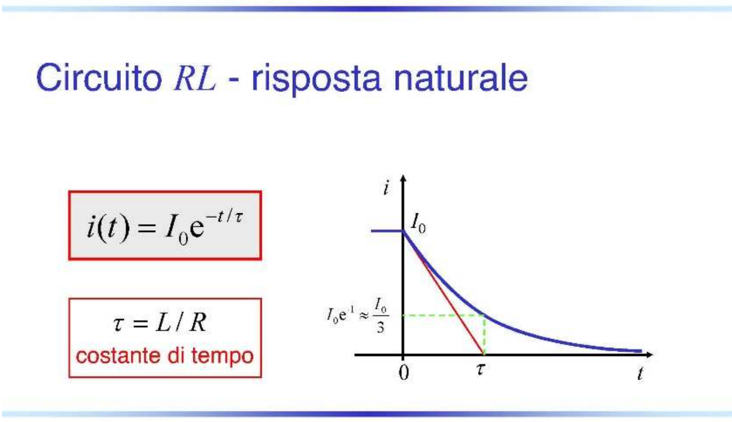


Figura 18 – Risposta in corrente del circuito RL.

Dalla equazione (2.22) è evidente che la costante di tempo per il circuito RL è:

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{2.39}$$

Con τ espressa in secondi. Infatti:

$$R \to [\Omega] = \left[\frac{Volt}{Ampere}\right]$$

$$L \to [H] = \left[\frac{Volt \times \text{secondo}}{Ampere}\right]$$

$$\tau = \frac{L}{R} \to \left[\frac{Volt \times \text{secondo}}{Ampere}\right]\left[\frac{Ampere}{Volt}\right] = [\text{secondo}]$$

La (2.22) può, quindi, scriversi come:

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.40}$$

Di conseguenza, la tensione ai morsetti della resistenza:

$$v_R(t) = Ri = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.41}$$

La potenza dissipata dal resistore:

$$p = v_R i = RI_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.42}$$

E l'energia:

$$w_R = \int_0^t pdt = \int_0^t RI_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{1}{2}\tau RI_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^t$$

O anche:

$$w_R(t) = \frac{1}{2} LI_0^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \tag{2.43}$$

Si noti che quando $t \to \infty$, $w_R(\infty) = \frac{1}{2} LI_0^2$, che coincide con $w_L(0)$, l'energia iniziale immagazzinata in L. L'energia che inizialmente era immagazzinata nell'induttore è tutta dissipata nel resistore.

Riassumendo, *le quantità da determinare per calcolare la risposta naturale di un circuito RL* sono:

- Corrente iniziale $i(0) = I_0$ nell'induttore.
- Costante di tempo τ .

Note queste due grandezze, si ottiene la risposta in corrente dell'induttore del condensatore $i_L(t) = i(t) = i(0)e^{-t/\tau}$. Una volta nota la corrente nell'induttore, le altre grandezze (tensione sull'induttore v_L, tensione ai morsetti del resistore v_R e corrente nel resistore i_R) possono essere facilmente determinate.

Nell'espressione della costante di tempo $\tau = \frac{L}{R}$, R rappresenta la resistenza equivalente di Thevenin ai morsetti del dell'induttore, si toglie cioè l'induttore dal circuito e si calcola $R = R_{Th}$ ai suoi morsetti.

2.4. Risposta forzata o risposta a stato zero o risposta al gradino di un circuito RL
Si consideri il circuito RL di figura 19a che può essere sostituito dal circuito di figura 19b. Si vuole determinare l'andamento della corrente nell'induttore.

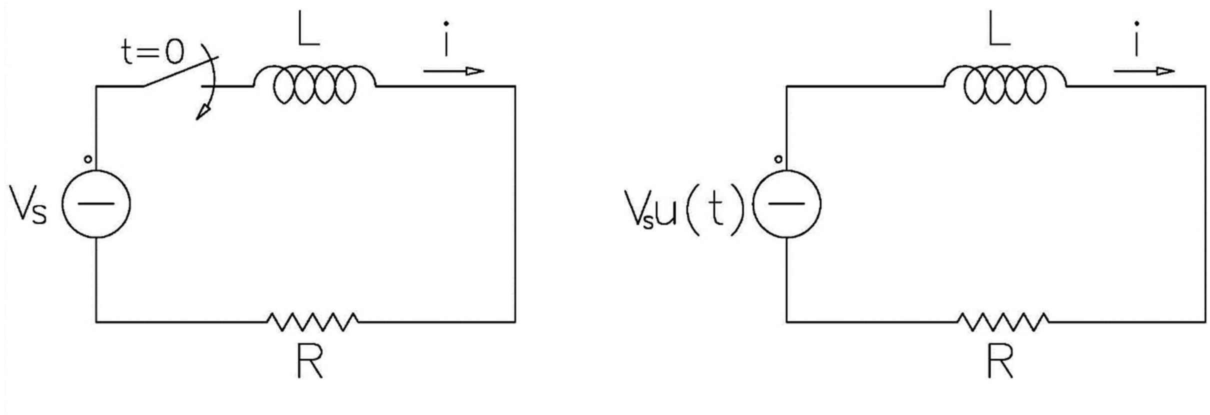


Figura 19 - Circuito RL con un gradino di tensione in ingresso

a *b*

Invece di scrivere l'equazione alla maglia, esprimiamo la risposta come somma della risposta naturale e della risposta forzata:

$$i = i_n + i_f \tag{2.44}$$

È noto che la risposta naturale è sempre un esponenziale decrescente, cioè:

$$i_n = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad \tau = \frac{L}{R} \tag{2.45}$$

Dove A è una costante da determinare.
La risposta forzata è il valore della corrente dopo molto tempo che l'interruttore è stato chiuso; l'induttore in tale condizione si comporta come un corto circuito e la tensione ai suoi morsetti è nulla. Tutta la tensione V si localizza su R; per cui la risposta forzata è:

$$i_f = \frac{V_S}{R} \tag{2.46}$$

Inserendo le due risposte nella (1.44) si ha:

$$i = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_S}{R} \tag{2.47}$$

Determiniamo ora la costante A dal valore iniziale di i. Sia I_0 la corrente iniziale nell'induttore, che potrebbe essere dovuta a una sorgente diversa da V_S. Poiché la corrente in un induttore non può variare istantaneamente,

$$i\left(0^+\right) = i\left(0^-\right) = I_0 \tag{2.48}$$

Per $t = 0$ la (2.47) diviene:

$$I_0 = A + \frac{V_S}{R}$$

Da questa si ottiene A come:

$$A = I_0 - \frac{V_S}{R}$$

E sostituendolo nella (2.47), si ha:

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.49}$$

Questa è la risposta completa del circuito RL, riportata in figura 20 nel caso di istante iniziale t=t_0.

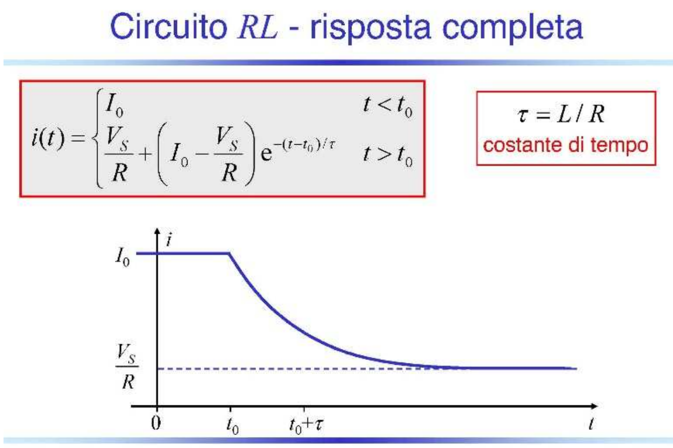


Figura 20– Risposta completa al gradino di un circuito RL con induttore inizialmente carico.

La risposta può essere scritta come:

$$i(\mathrm{t}) = i(\infty) + \left[i(0) - i(\infty) \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.50}$$

Dove $i(0)$ e $i(\infty)$ sono i valori iniziale e finale di i.
In definitiva, per determinare la risposta completa al gradino di un circuito RL sono quindi necessarie tre informazioni:

1. La corrente iniziale nell'induttore $i(0)$ in $t = 0^+$.
2. La corrente finale nell'induttore $i(\infty)$.
3. La costante di tempo τ.

L'informazione 1 si determina dal circuito per $t < 0$, le quantità 2 e 3 si calcolano dal circuito per $t > 0$. Ottenuti questi elementi la risposta sarà:

$$i(\mathrm{t}) = i(\infty) + \left[i(0) - i(\infty) \right] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Si ricordi che questo metodo è valido solo per la risposta al gradino.

Anche in questo caso se la commutazione avviene all'istante $t = t_0$ invece che in $t = 0$, la (2.50) diviene

$$i(\mathrm{t}) = i(\infty) + \left[i(t_0) - i(\infty) \right] e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} \tag{2.51}$$

Se invece $I_0 = 0$, allora:

$$i(t) = \begin{cases} 0, & \mathrm{t<0} \\ \dfrac{V_S}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), & \mathrm{t>0} \end{cases} \tag{2.52}$$

O anche:

$$i(t) = \frac{V_S}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u(t) \tag{2.53}$$

Questa è la risposta al gradino del circuito RL con induttore scarico. La tensione ai morsetti di L si ottiene dalla (2.53) usando la relazione $v = L\dfrac{di}{dt}$. Si ha

$$v(t) = L\frac{di}{dt} = V_S \frac{L}{\tau R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{L}{R}, \quad t > 0$$

Cioè:

$$v(t) = V_S e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) \tag{2.54}$$

La figura 21, riporta le risposte al gradino

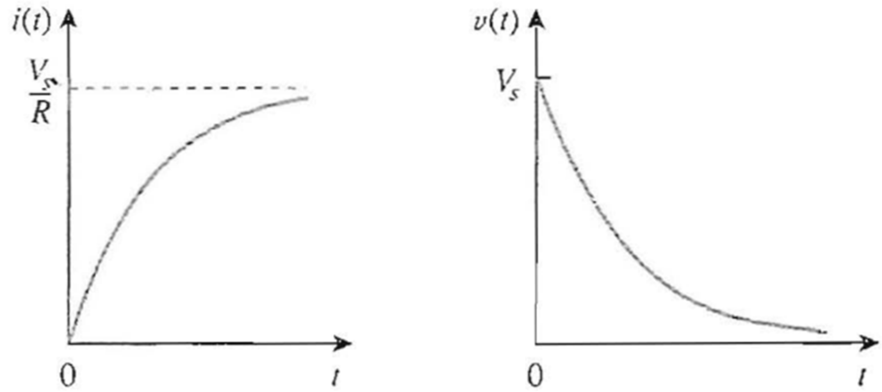
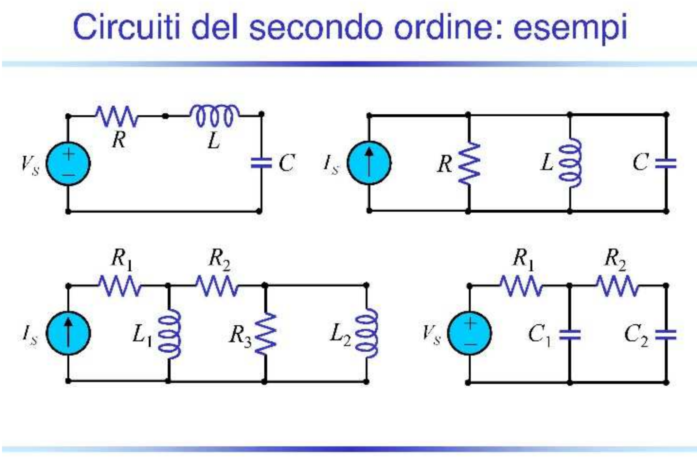


Figura 21– Risposte complete al gradino di un circuito RL con induttore inizialmente scarico.

3. Circuiti del secondo ordine

Un circuito del *secondo ordine* è caratterizzato da un'equazione differenziale del secondo ordine. Esso contiene resistori e l'equivalente di due elementi dinamici.



3.1. Risposta naturale o a ingresso nullo di un circuito RLC serie

Si consideri il circuito RLC serie di figura 22. Il circuito è eccitato dall'energia iniziale immagazzinata nel condensatore e nell'induttore. Tale energia è rappresentata dalla tensione iniziale V_0 del condensatore e dalla corrente iniziale I_0 nell'induttore.

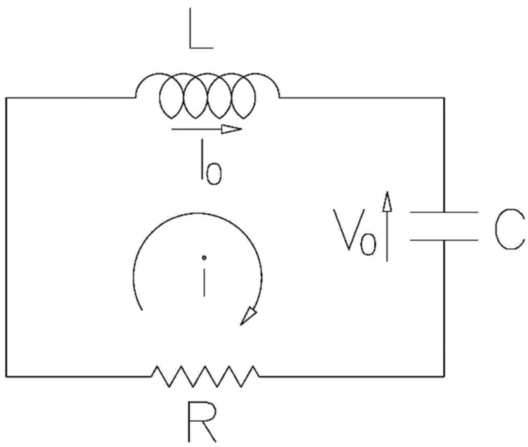


Figura 22 - Circuito RLC serie

Per questo motivo, in t=0:

$$v(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i dt = V_0 \tag{3.1}$$

$$i(0) = I_0 \tag{3.2}$$

Applicando la legge alla maglia:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i dt = 0 \tag{3.3}$$

E derivando rispetto a t, per eliminare l'integrale, e riordinando:

$$\frac{d^2 i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=0 \tag{3.4}$$

Questa è un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti, è per questa ragione che i circuiti RLC sono detti circuiti del secondo ordine.

Per poter risolvere la (3.4) è necessario conoscere due condizioni iniziali, quali per esempio il valore iniziale di i e della sua derivata, oppure i valori iniziali di i e di v. Il valore iniziale di i è dato dalla (3.2). Si può ricavare il valore iniziale della derivata di i dalle (3.1) e (3.3):

$$\begin{aligned} &Ri(0)+L\frac{di(0)}{dt}+V_0=0 \\ &\text{cioè} \\ &\frac{di(0)}{dt}=-\frac{1}{L}\left(RI_0+V_0\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Con le due condizioni iniziali (3.2) e (3.5) è possibile risolvere la (3.4).

Ponendo ora $\frac{di}{dt}=s$ si ricava l'equazione caratteristica (polinomio caratteristico) della nostra equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti:

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0 \tag{3.6}$$

Le due radici della (1.6) sono:

$$\begin{aligned} s_1&=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \\ s_2&=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

In maniera compatta:

$$\begin{aligned} s_1&=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \\ s_2&=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

dove:

$$\begin{aligned} \alpha&=\frac{R}{2L} \\ \omega_0&=\frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Le radici s_1 ed s_2 sono chiamate *frequenze naturali*, perché associate alla risposta naturale del circuito; ω_0 è detta *frequenza di risonanza* o anche, a volte, *frequenza naturale non smorzata*, espressa in radianti al secondo; α è detto *fattore di smorzamento*.

In termini di α e ω_0 la (3.6) si può scrivere:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \tag{3.10}$$

I due valori di s nella (3.8) indicano che esistono due possibili soluzioni per i, ciascuna della quali ha la forma:

$$\begin{aligned} i_1 &= A_1 e^{s_1 t} \\ i_2 &= A_2 e^{s_2 t} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Poiché la (3.4) è un'equazione lineare, qualunque combinazione lineare delle due soluzioni i_1 e i_2 è pure soluzione della (3.4).

La soluzione completa della (3.4) è quindi espressa da una combinazione lineare di i_1 e i_2: *la risposta naturale del circuito RLC serie* è quindi:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{3.12}$$

In cui le costanti A_1 e A_2 devono essere determinate in base ai valori iniziali $i(0)$ e $\dfrac{di(0)}{dt}$ nelle (3.2) e (3.5).

Dalle (3.8) si deduce che esistono tre tipi di soluzione:

- Se $\alpha > \omega_0$ si ha il caso *sovrasmorzato*. (Le radici s_1 e s_2 sono reali e negative)
- Se $\alpha = \omega_0$ si ha il caso di *sovrasmorzamento critico*. (Le radici s_1 e s_2 sono reali e coincidenti)
- Se $\alpha < \omega_0$ si ha il caso *sottosmorzato*. (Le radici s_1 e s_2 sono complesse coniugate)

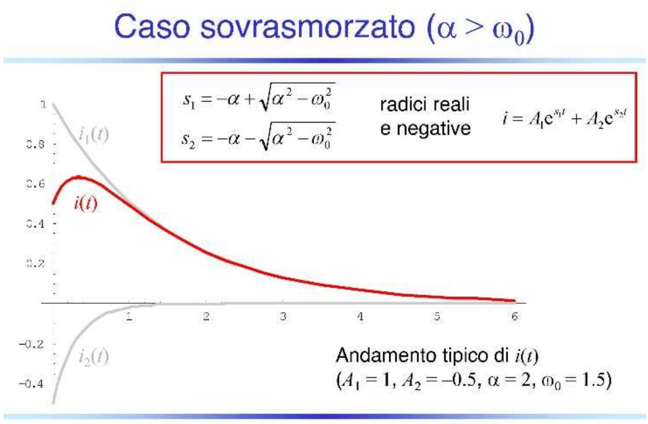
Caso sovrasmorzato ($\alpha > \omega_0$) (costante di smorzamento maggiore della pulsazione di risonanza)

Dalle (3.7) e (3.8), $\alpha > \omega_0$ quando $C > \dfrac{4L}{R^2}$. Quando ciò accade, entrambe le radici s_1 e s_2 sono reali e negative.

La risposta è:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{3.13}$$

Che decresce e tende a zero al crescere di t.



Risposta Sovrasmorzata RLC Serie

Caso di smorzamento critico ($\alpha = \omega_0$) (costante di smorzamento uguale alla pulsazione di risonanza)

Quando $\alpha = \omega_0$, $C = \dfrac{4L}{R^2}$, le radici sono reali e coincidenti:

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{R}{2L} \tag{3.14}$$

Per questo caso la (3.13) dà:

$$i(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t} = A_3 e^{-\alpha t}$$

con $A_3 = A_1 + A_2$. Questa però non può essere la soluzione perché le due condizioni iniziali non possono essere entrambe soddisfatte dalla singola costante A_3. La forma della soluzione che si è assunta non può quindi essere valida per il caso di smorzamento critico.

Riprendendo in esame la (3.4), quando $\alpha = \omega_0 = \dfrac{R}{2L}$, essa diventa:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \alpha^2 i = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \alpha \frac{di}{dt} + \alpha \frac{di}{dt} + \alpha^2 i = 0$$

o anche

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt} + \alpha i\right) + \alpha\left(\frac{di}{dt} + \alpha i\right) = 0 \tag{3.15}$$

Se si pone

$$f = \frac{di}{dt} + \alpha i \tag{3.16}$$

Allora la (3.15) diventa $\dfrac{df}{dt} + \alpha f = 0$ che è una equazione differenziale del primo ordine la cui soluzione è $f = A_1 e^{-\alpha t}$, dove A_1 è una costante. La (3.16) diventa allora:

$$\frac{di}{dt} + \alpha i = A_1 e^{-\alpha t}$$

cioè:

$$e^{\alpha t}\frac{di}{dt} + e^{\alpha t}\alpha i = A_1 \tag{3.17}$$

Che può essere scritta come:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t} i\right) = A_1 \tag{3.18}$$

Ed integrando ambo i membri

$$e^{\alpha t} i = A_1 t + A_2$$

ed anche

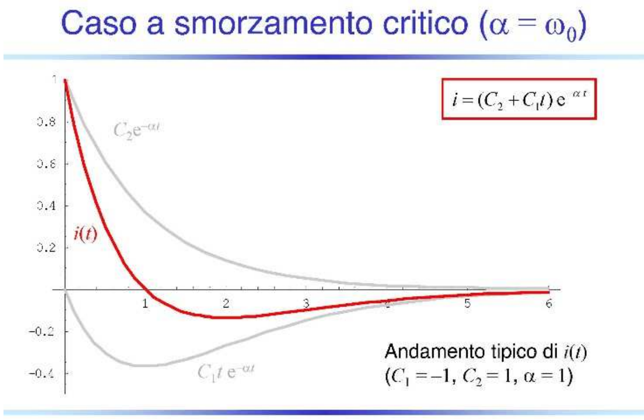
$$i = (A_1 t + A_2) e^{-\alpha t} \tag{3.19}$$

dove A_2 è una nuova costante.

La risposta naturale del circuito criticamente smorzato è allora la somma di due termini:

- un esponenziale negativo
- un esponenziale negativo moltiplicato per un termine lineare

$$i = (A_2 + A_1 t)e^{-\alpha t} \tag{3.20}$$



Risposta criticamente smorzata RLC Serie (C_1=A_1; C_2=A_2)

Caso sottosmorzato ($\alpha < \omega_0$) (costante di smorzamento minore della pulsazione di risonanza)

$\alpha < \omega_0$, $C < \dfrac{4L}{R^2}$. Le radici sono complesse e possono essere scritte nella forma:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-\left(\omega_0^2 - \alpha^2\right)} = -\alpha + j\omega_d \tag{3.21}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{-\left(\omega_0^2 - \alpha^2\right)} = -\alpha - j\omega_d \tag{3.22}$$

dove $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

Sia ω_0 , sia ω_d sono frequenze naturali perché contribuiscono alla determinazione della risposta naturale, ω_0 è spesso detta *frequenza naturale non smorzata*, ω_d è chiamata *frequenza naturale smorzata*.

La risposta naturale è:

$$i(t) = A_1 e^{-(\alpha - j\omega_d)t} + A_2 e^{-(\alpha + j\omega_d)t} = e^{-\alpha t}\left(A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}\right) \tag{3.23}$$

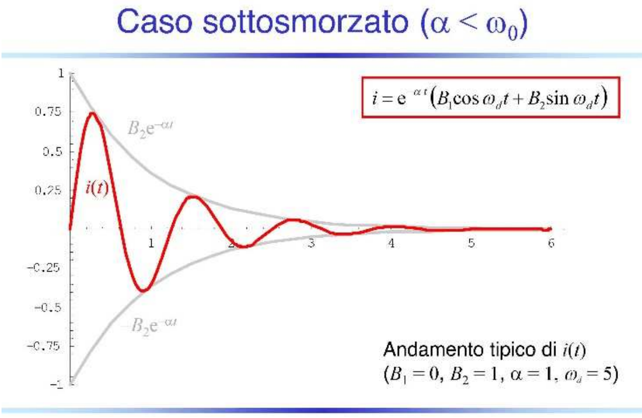
Usando le identità di Eulero $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ e $e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$ si ottiene:

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\alpha t}\left[A_1\left(\cos\omega_d t + j\sin\omega_d t\right) + A_2\left(\cos\omega_d t - j\sin\omega_d t\right)\right] \\ &= e^{-\alpha t}\left[\left(A_1 + A_2\right)\cos\omega_d t + j\left(A_1 - A_2\right)\sin\omega_d t\right] \end{aligned} \tag{3.24}$$

Sostituendo le costanti $\left(A_1 + A_2\right)$ e $j\left(A_1 - A_2\right)$ con le costanti B_1 e B_2, possiamo scrivere:

$$i(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t\right) \tag{3.25}$$

A causa della presenza delle funzioni seno e coseno, è chiaro che la risposta naturale per questo caso è smorzata secondo un esponenziale ed ha natura oscillatoria.
Essa ha una costante di tempo pari a $1/\alpha$ ed un periodo $T = 2\pi/\omega_d$.
La figura illustra una tipica risposta sottosmorzata.



Risposta sottosmorzata RLC Serie (B_1=A_1; B_2=A_2)

In conclusione, per quanto finora detto, si possono segnalare le seguenti proprietà di una rete RLC:

- il comportamento della rete RLC è caratterizzato dal concetto di *smorzamento*, che consiste nella graduale perdita dell'energia iniziale immagazzinata, come evidenziato dalla diminuzione progressiva dell'ampiezza della risposta.
  L'effetto di smorzamento è dovuto alla presenza della resistenza R. Il fattore di smorzamento α determina la rapidità con la quale la risposta è smorzata. Se $R = 0$ allora $\alpha = 0$ e si ha un circuito LC con $1/\sqrt{LC}$ come frequenza naturale non smorzata. Poiché $\alpha < \omega_0$ in questo caso, la risposta non è solo priva di smorzamento ma anche oscillatoria. Il circuito è detto senza perdite perché l'elemento dissipatore che causerebbe lo smorzamento (R) è assente. Scegliendo opportunamente il valore di R, la risposta può essere resa non smorzata, sovrasmorzata, criticamente smorzata, sottosmorzata.

- La risposta oscillatoria è possibile grazie alla presenza di due tipi di elementi dinamici. La presenza di L e di C consente uno scambio continuo di energia fra i due. Anche l'oscillazione smorzata esibita dalla risposta sottosmorzata è dovuta alla proprietà dei due elementi conservativi L e C di trasferire energia dall'uno all'altro ripetutamente.

- Dalle figure inerenti alle risposte si osserva che le forme d'onda delle risposte sono diverse fra loro. In generale, è difficile distinguere dalle forme d'onda la differenza tra la risposta sovrasmorzata e quella a smorzamento critico. Il caso di smorzamento critico rappresenta l'elemento di separazione tra i casi sottosmorzato e sovrasmorzato, ed è caratterizzato dalla massima velocità di decadimento. A parità di condizioni iniziali, la risposta sovrasmorzata si annulla con un ritardo superiore alle altre, perché è necessario un intervallo di tempo maggiore per dissipare l'energia iniziale immagazzinata. Se si volesse la risposta più veloce, senza causare oscillazioni, la scelta giusta è il circuito a smorzamento critico.

3.2. Risposta forzata o risposta a stato zero o risposta al gradino di un circuito RLC serie

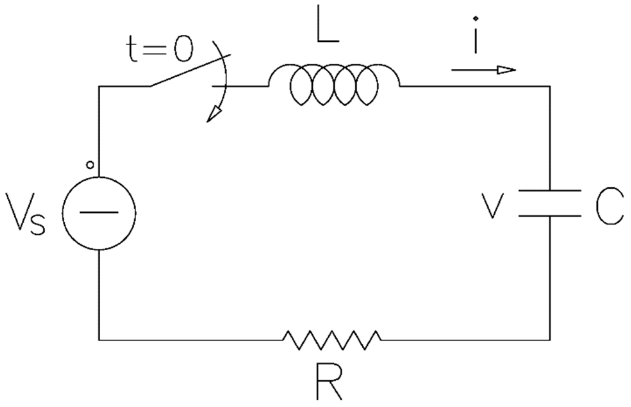


Figura 23 - Gradino di tensione applicato ad un circuito RLC serie

Si consideri il circuito RLC serie di figura 23, applicando la legge alla maglia per $t > 0$:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + v = V_S \tag{3.26}$$

Ma $i = C\frac{dv}{dt}$

Sostituendo l'espressione di i nella (3.1) e riordinando i termini,

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_S}{LC} \tag{3.27}$$

Che ha la forma ormai a noi nota. In particolare i coefficienti sono gli stessi, ciò è importante per la determinazione delle frequenze naturali, ma l'incognita è diversa. L'equazione caratteristica del circuito RLC serie non è modificata quindi dalla presenza del generatore costante.
La soluzione della (3.42) è formata da due componenti:

- la risposta transitoria $v_t(t)$ o risposta naturale o ad ingresso nullo;
- la risposta di regime $v_{SS}(t)$ o risposta forzata o a stato zero.

$$v(t) = v_t(t) + v_{SS}(t) \tag{3.28}$$

La risposta transitoria $v_t(t)$ è la componente della risposta completa che si annulla al passare del tempo. In pratica è la risposta naturale del circuito o risposta a ingresso nullo. Quindi la risposta transitoria $v_t(t)$ per i casi sovrasmorzato, a smorzamento critico e sottosmorzato è:

$$v_t(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} \quad \text{(Sovrasmorzata)} \tag{3.29}$$

$$v_t(t) = (A_1 + A_2t)e^{-\alpha t} \qquad \text{(A smorzamento critico)} \tag{3.30}$$

$$v_t(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t\right) \quad \text{(Sottosmorzata)} \tag{3.31}$$

La risposta forzata o a stato zero o di regime è il valore finale di $v(t)$. Nel circuito di figura 3 il valore finale della tensione sul condensatore coincide con la tensione del generatore V_S. Perciò:

$$v_f(t) = v(\infty) = V_S \tag{3.32}$$

Le soluzioni complete per i casi sovrasmorzato, a smorzamento critico e sottosmorzato sono quindi:

$$v(t) = V_S + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad \text{(Sovrasmorzata)} \tag{3.33}$$

$$v(t) = V_S + (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t} \qquad \text{(A smorzamento critico)} \tag{3.34}$$

$$v(t) = V_S + \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t\right) \quad \text{(Sottosmorzata)} \tag{3.35}$$

I valori delle costanti A_1 e A_2 si ottengono dalle condizioni iniziali $v(0)$ e $\frac{dv(0)}{dt}$.

Si rammenti che v e i sono rispettivamente la tensione ai morsetti del condensatore e la corrente che scorre nell'induttore. Quindi le (3.48), (3.49) e (3.50), sono valide solo per determinare v.Una volta nota la v è possibile determinare $i = Cdv/dt$ che è la corrente nella maglia; poi la tensione su R vale $v_R = Ri$ e la tensione in L è $v_L = Ldi/dt$.

In alternativa, la risposta completa per una qualsiasi variabile $x(t)$ si può ottenere dalla forma generale:

$$x(t) = x_{SS}(t) + x_t(t) \tag{3.36}$$

dove $x_{SS} = x(\infty)$ è il valore finale ed $x_t(t)$ è la risposta ad ingresso nullo o risposta naturale o risposta transitoria.

3.3. Risposta naturale o a ingresso nullo circuito RLC parallelo

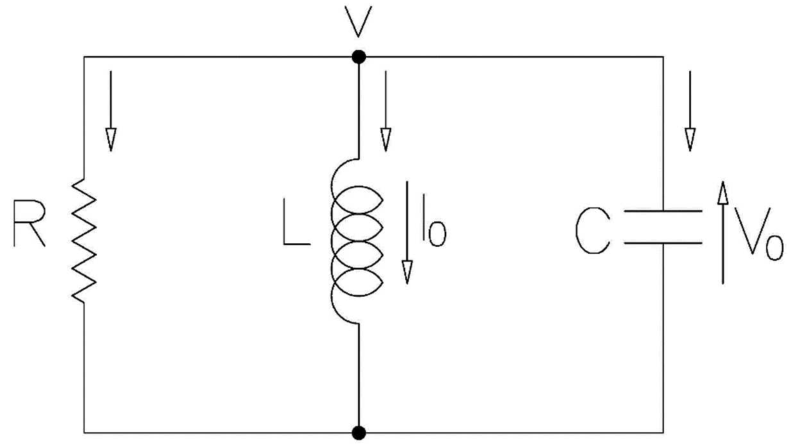


Figura 24 - Circuito RLC parallelo

Si consideri il circuito RLC parallelo di figura 24. Si supponga che la corrente iniziale nell'induttore valga I_0 e la tensione iniziale sul condensatore V_0.

$$i(0) = I_0 = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} v(t)dt \tag{3.37}$$

$$\mathrm{v}(0) = V_0 \tag{3.38}$$

Poiché i tre componenti sono in parallelo, ad essi è applicata la medesima tensione v. I versi delle correnti sono quelli di figura, per cui applicando la legge al nodo superiore si ottiene:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v dt + C\frac{dv}{dt} = 0 \tag{3.39}$$

Derivando rispetto a t e dividendo per C, otteniamo:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0 \tag{3.40}$$

L'equazione caratteristica si ottiene sostituendo la derivata prima con s e la derivata seconda con s^2. Ripetendo quanto già fatto nel paragrafo precedente, l'equazione caratteristica risulta:

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{3.41}$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{3.42}$$

oppure

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{3.43}$$

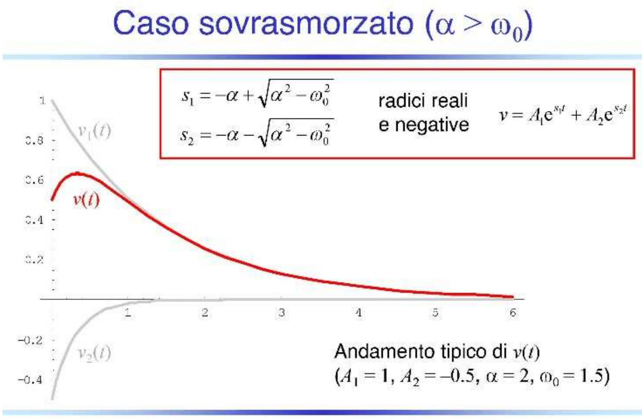
dove:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2RC} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Le radici s_1 ed s_2 sono chiamate *frequenze naturali*, perché associate alla risposta naturale del circuito; ω_0 è detta *frequenza di risonanza* o anche, a volte, *frequenza naturale non smorzata*, espressa in radianti al secondo; α è detto *fattore di smorzamento (da notare che è diverso da quello del circuito in serie).*
Anche qui esistono tre possibili soluzioni a seconda che sia $\alpha > \omega_0$, $\alpha = \omega_0$ oppure $\alpha < \omega_0$.
I tre casi saranno ora considerati separatamente.

Caso sovrasmorzato ($\alpha > \omega_0$) (costante di smorzamento maggiore della pulsazione di risonanza)
Dalle (3.33), $\alpha > \omega_0$ quando $L > 4R^2C$. Quando ciò accade, entrambe le radici s_1 e s_2 sono reali e negative.
La risposta è:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{3.45}$$

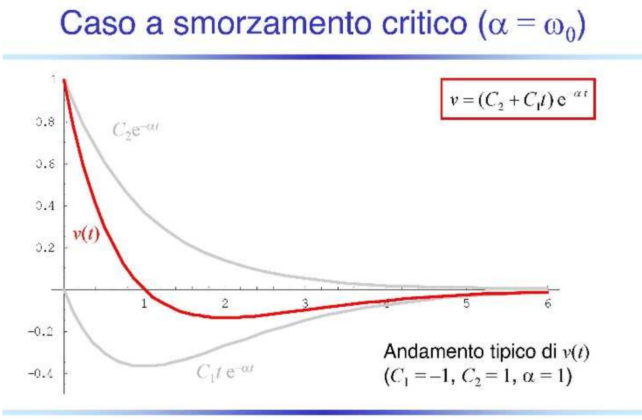


Risposta Sovrasmorzata RLC Parallelo

Caso di smorzamento critico ($\alpha = \omega_0$) (costante di smorzamento uguale alla pulsazione di risonanza)

Quando $\alpha = \omega_0$, $L = 4R^2C$. Le radici sono reali e coincidenti e la risposta è:

$$v(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t} \tag{3.46}$$



Risposta criticamente smorzata RLC Parallelo (C_1=A_1; C_2=A_2)

Caso sottosmorzato ($\alpha < \omega_0$) (costante di smorzamento minore della pulsazione di risonanza)

$\alpha < \omega_0$, $L < 4R^2C$. Le radici sono complesse e possono essere scritte nella forma:

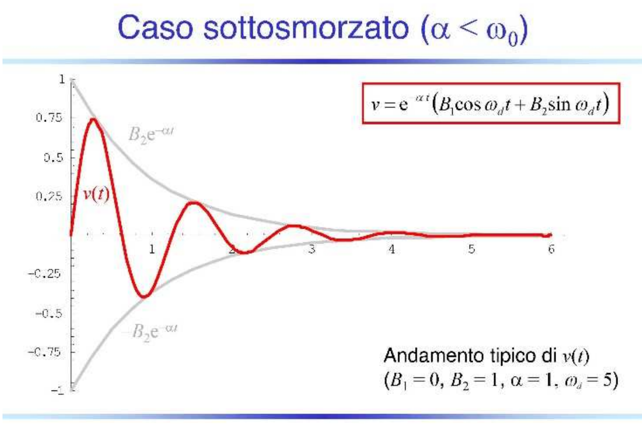
$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \tag{3.47}$$

dove

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \tag{3.48}$$

La risposta è:

$$v(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\right) \tag{3.49}$$



Risposta sottosmorzata RLC Parallelo (B_1=A_1; B_2=A_2)

Le costanti A_1 e A_2, in ciascun caso si possono determinare dalle condizioni iniziali. Sono necessarie $v(0)$ e $\frac{dv(0)}{dt}$.
La prima è nota dalla (3.27); la seconda si determina dalle (3.26), (3.27) e (3.28):

$$\frac{V_0}{R} + I_0 + C\frac{dv(0)}{dt} = 0 \tag{3.50}$$

cioè:

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{\left(V_0 + RI_0\right)}{RC} \tag{3.51}$$

Le forme d'onda della tensione sono simili a quelle riportate nelle figure precedenti a seconda che il circuito sia sovrasmorzato, smorzato criticamente o sottosmorzato.
Si noti che per il circuito RLC serie è stata scelta come incognita la corrente dell'induttore, invece per il circuito RLC parallelo è stata scelta la tensione del condensatore.

3.4. Risposta forzata o risposta a stato zero o risposta al gradino di un circuito RLC parallelo

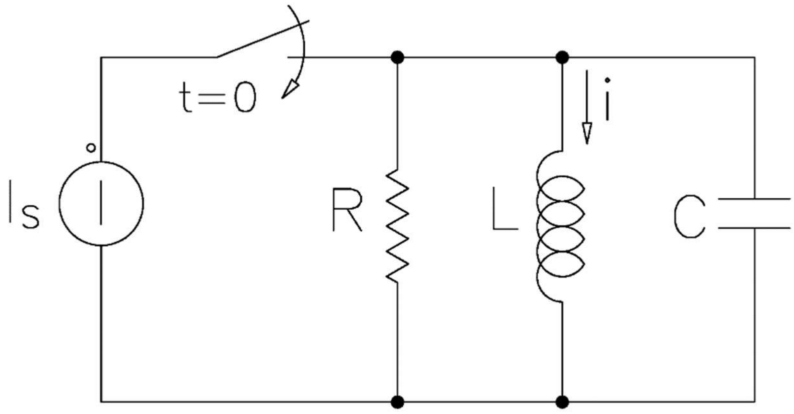


Figura 25 - Circuito RLC parallelo con una corrente applicata.

Si consideri il circuito RLC parallelo di figura 25. Si vuole determinare i successivamente all'applicazione improvvisa di una corrente costante.
Applicando la legge al nodo superiore, per $t > 0$:

$$\frac{v}{R} + i + C\frac{dv}{dt} = I_S \tag{3.52}$$

Ma $v = L\frac{di}{dt}$; sostituendo l'espressione di v nella (3.53) e dividendo per LC si ottiene:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_S}{LC} \tag{3.53}$$

Che ha la stessa equazione caratteristica vista precedentemente.
La soluzione completa della (3.54) è formata da una risposta transitoria $i_t(t)$ e da una risposta di regime i_{SS}:

$$i(t) = i_t(t) + i_{SS}(t) \tag{3.54}$$

La risposta transitoria coincide con quella ottenuta nei paragrafi precedenti. La risposta di regime è il valore finale di i; nel circuito di figura 4 il valore finale della corrente nell'induttore coincide con la corrente del generatore I_S. Quindi

$$i(t) = I_S + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad \text{(Sovrasmorzata)} \tag{3.55}$$

$$i(t) = I_S + (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t} \qquad \text{(A smorzamento critico)} \tag{3.56}$$

$$i(t) = I_S + \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\right) \quad \text{(Sottosmorzata)} \tag{3.57}$$

Le costanti A_1 e A_2 si possono determinare in base alle condizioni iniziali per i e $\frac{di}{dt}$. Anche qui occorre evidenziare che le (3.56), (3.57) e (3.58) sono valide solo per determinare la corrente i nell'induttore. Una volta determinata la corrente nell'induttore $i_L = i$, è possibile calcolare $v = L\frac{di}{dt}$, che è la medesima tensione sia su induttore, sia su condensatore e resistore. Quindi la corrente nel resistore vale $i_R = v / R$, e la corrente nel condensatore è $i_C = C\frac{dv}{dt}$.

In alternativa, la risposta completa per una qualunque variabile $x(t)$ può essere calcolata direttamente con l'espressione:

$$x(t) = x_{SS}(t) + x_t(t) \tag{3.58}$$

dove x_{SS} e x_t sono il valore finale e la risposta transitoria, rispettivamente.

3.5. I circuiti del secondo ordine nel caso generale

Dato un circuito del secondo ordine, la risposta al gradino $x(t)$, che può essere una tensione o una corrente, si determina secondo i seguenti quattro passi:

1. Si determina per prima cosa le condizioni iniziali $x(0)$ e $\frac{dx(0)}{dt}$ ed il valore finale $x(\infty)$.
2. Si determina la risposta transitoria $x_t(t)$ spegnendo i generatori indipendenti e applicando le leggi ai nodi e alle maglie. Una volta ottenuta l'equazione differenziale del secondo ordine, se ne determinano le radici caratteristiche. A seconda che la risposta sia sovrasmorzata, a smorzamento critico o sottosmorzata, si ottiene $x_t(t)$ con due costanti incognite.
3. Si ricava la risposta di regime come:

$$x_{SS}(t) = x(\infty) \tag{3.59}$$

   dove $x(\infty)$ è il valore finale di x, ottenuto al passo 1.

4. La risposta completa consiste ora nella somma della risposta transitoria e di quella di regime:

$$x(t) = x_t(t) + x_{SS}(t) \tag{3.60}$$

   Si determinano infine le costanti associate alla risposta transitoria, imponendo le condizioni iniziali $x(0)$ e $\frac{dx(0)}{dt}$, determinate al passo 1.

Questo procedimento generale può essere applicato per il calcolo della risposta al gradino di un qualunque circuito del secondo ordine.

4 Analisi nel dominio del tempo

Ricordiamo che si definisce transitorio il periodo di tempo che intercorre nel passaggio di un sistema da uno stato energetico ad un altro, non è comunque sempre vero che un sistema in seguito ad un transitorio ammetta regime permanente finale, infatti affinché questo si verifichi è necessario che il sistema sia *stabile*.

Come visto precedentemente l'equazione integro differenziale rappresentativa dell'equilibrio elettrico di un circuito RLC è la seguente:

$$v - L\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i dt = Ri \tag{4.1}$$

che derivata porta ad un'equazione differenziale del secondo ordine del tipo

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d \tag{4.2}$$

per determinare il comportamento del sistema è pertanto necessario risolvere l'equazione differenziale. Consideriamo quindi *l'equazione omogenea associata* alla (2):

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \tag{4.3}$$

sappiamo che un'equazione differenziale omogenea come questa ha una soluzione generale del tipo

$$x = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} \tag{4.4}$$

la soluzione dell'omogenea rappresenta quindi la *risposta ad ingresso nullo o risposta all'oscillazione libera*, in quanto le forzanti (d) sono state poste a zero; ovviamente il sistema si evolve solo se inizialmente possiede energia, in altre parole se le condizioni iniziali sono diverse da zero.
I termini α_1 e α_2 hanno le dimensioni di una frequenza, e prendono il nome di *frequenze naturali del sistema*. Se le frequenze naturali sono negative, o complesse coniugate con parte reale negativa, il sistema è *stabile*, ammette cioè regime permanente finale.

Le frequenze naturali di un circuito elettrico, (lo stesso vale per un qualunque sistema dinamico del secondo ordine), sono quindi le frequenze di oscillazione libera del sistema stesso.

Per ricavare la soluzione generale della (4.2) è necessario però trovare un integrale particolare e questo rappresenta la *risposta a stato zero*, dunque la soluzione generale, come già visto, è del tipo

$$x(t) = x_t(t) + x_{SS}(t)$$

dove:

$$x_t(t) \text{ è la risposta a ingresso nullo}$$
$$x_{SS}(t) \text{ è la risposta a stato zero}$$

Un esempio di risposta a stato zero è la carica di un induttore inizialmente scarico (condizioni iniziali nulle e quindi stato energetico nullo o zero), infatti, come ben noto, la corrente di carica ha un andamento del tipo:

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = i_p + i_t$$

dove:

$$i = \frac{E}{R} = i_p \qquad \textit{componente a regime della risposta}$$

$$i = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = i_t \qquad \textit{componente transitoria della risposta}$$

Un esempio, invece, di risposta ad ingresso nullo è rappresentato dalla scarica di un induttore, ovviamente carico, e non collegato a nessuna forzante esterna

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = i_t$$

Evidentemente la componente a regime della risposta è $i_p = 0$ essendo la corrente nulla dopo la scarica dell'induttore stesso.

Quello appena illustrato è quindi un metodo per affrontare lo studio dei transitori nel dominio del tempo.

In generale in un circuito elettrico le *frequenze naturali* sono tante quante sono le condizioni iniziali linearmente indipendenti che possono essere assegnate al circuito, ovvero sono pari alla molteplicità del polinomio caratteristico che si ottiene dal sistema, ovvero ancora all'ordine di complessità del circuito.
Questo potrebbe indurre a pensare che le frequenze naturali siano tante quanti sono gli elementi reattivi presenti nel circuito, questo non è vero poiché le *condizioni iniziali devono essere linearmente indipendenti*, ad esempio, le correnti nei tre induttori di figura 26 sono legate dall'equazione al nodo; allo stesso modo le tensioni sui condensatori rappresentati nella stessa figura sono legate dall'equazione alla maglia.

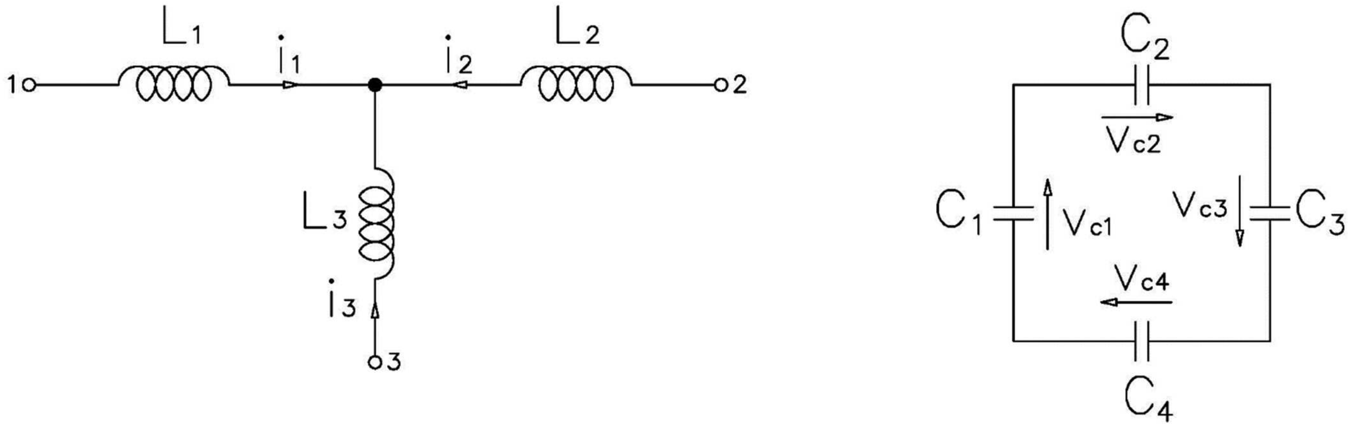


Figura 26 – Nodo (insieme di taglio) costituito da induttori e maglia di condensatori.

Con riferimento al nodo in cui convergono solo induttori, possiamo scrivere:

$$i_1(0)+i_2(0)+i_3(0)=0 \tag{4.5}$$

da cui si nota che le tre condizioni iniziali non sono linearmente indipendenti, non possiamo scegliere, infatti, arbitrariamente tre condizioni iniziali per gli induttori, ma solo due perché la terza è data dalla (4.5). Con riferimento poi alla maglia costituita da soli condensatori, scriviamo:

$$v_{c1}(0)+v_{c2}(0)+v_{c3}(0)+v_{c4}(0)=0 \tag{4.6}$$

Quindi anche in questo caso le quattro condizioni iniziali non sono linearmente indipendenti, non possiamo scegliere, infatti, arbitrariamente quattro condizioni iniziali per i condensatori, ma solo tre perché la quarta è data dalla (4.6).

Riassumendo abbiamo quindi che il numero di frequenze naturali, cioè l'ordine di un circuito dinamico passivo è dato da:

$$n=n_R-n_C-n_L$$

dove

n_R *è il numero degli elementi reattivi*

n_C *è il numero delle maglie di soli condensatori e/o generatori indipendenti di tensione*

n_L *è il numero degli insiemi di taglio (nodi) di soli induttori e/o generatori indipendenti di corrente*

Per esemplificare quanto detto, consideriamo il circuito di figura 27:

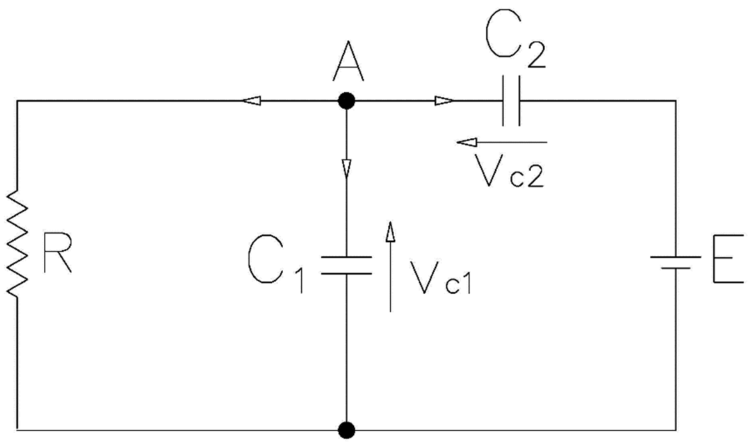


Figura 27

Scriviamo l'equazione alla maglia EC_2C_1E:

$$E+v_{c2}-v_{c1}=0 \tag{4.7}$$

Si possono assegnare arbitrariamente le due condizioni iniziali in tensione sui condensatori? No, perché violeremmo l'equazione appena scritta. Allora nonostante abbia due componenti reattivi, il circuito deve essere necessariamente del primo ordine; verifichiamolo. Con una LKC al nodo A della rete abbiamo:

$$\frac{v_{c1}}{R}+C_1\frac{dv_{c1}}{dt}+C_2\frac{dv_{c2}}{dt}=0 \tag{4.8}$$

Dalla (4.7) otteniamo:

$$v_{c2} = -E + v_{c1} \quad da\ cui\ \frac{dv_{c2}}{dt} = 0 + \frac{dv_{c1}}{dt}$$

Sostituendo nella (4.8), si ha:

$$\frac{v_{c1}}{R} + C_1 \frac{dv_{c1}}{dt} + C_2 \frac{dv_{c1}}{dt} = 0$$

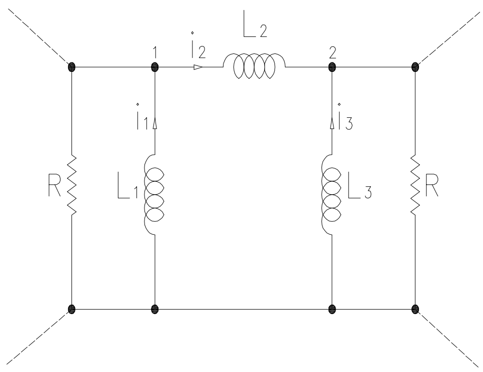
Da cui:

$$\frac{v_{c1}}{R} + \left(C_1 + C_2\right) \frac{dv_{c1}}{dt} = 0 \tag{4.9}$$

La (4.9) è un'equazione differenziale del primo ordine nell'incognita v_{c1}, per cui il circuito è del primo ordine e non del secondo come si potrebbe ritenere, a prima vista, in maniera errata e superficiale.

Passiamo al caso delle *frequenze naturali nulle:* queste sono presenti laddove ci sia un andamento costante diverso da zero di una qualsiasi grandezza elettrica in gioco nel circuito considerato.
Se esiste quindi una frequenza nulla, allora la risposta a ingresso nullo può contenere un termine costante.
È chiaro che fisicamente ciò può accadere in due casi,

1. Presenza di una *maglia di soli induttori*



Scriviamo l'equazione alla maglia L_1, L_2, L_3, L_1 fissando cioè il senso di percorrenza orario, abbiamo:

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} = 0$$

Questa equazione è verificata solo se:

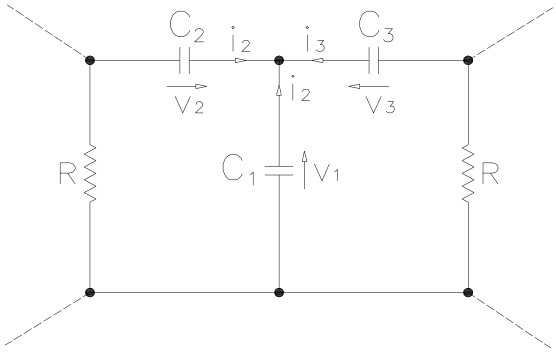
$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} = \frac{di_3}{dt} = 0$$

Cioè

$$i_1 = i_2 = i_3 = Costante$$

La variabile di rete che interessa è la corrente in un induttore e l'induttore è in una maglia di soli induttori.
Poiché tutti gli induttori sono ideali, può fluire nella maglia una corrente costante I ed ai morsetti degli induttori non ci sarà nessuna tensione, $L\frac{dI}{dt} = 0$.

2. Presenza di un *insieme di taglio di soli condensatori*



Scriviamo l'equazione al nodo in cui insistono i condensatori:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Cioè:

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{dv_2}{dt} + C_3 \frac{dv_3}{dt} = 0$$

Questa equazione è verificata solo se:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt} = \frac{dv_3}{dt} = 0$$

Cioè

$$v_1 = v_2 = v_3 = Costante$$

La variabile di rete che interessa è la tensione ai morsetti di un condensatore e il condensatore è in un insieme di taglio di soli condensatori.
Poiché tutti i condensatori sono ideali, può esistere ai morsetti di ciascun condensatore una tensione costante e, quindi, attraverso essi non fluirà alcuna corrente poiché $C\frac{dv_c}{dt} = 0$

Il caso generico è riportato in figura 28:

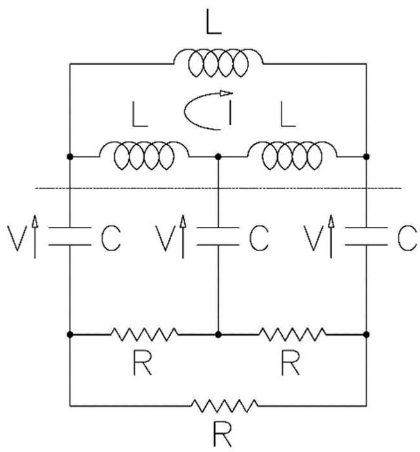


Figura 28 - Nodo (insieme di taglio) costituito da condensatori e maglia di induttori.

In conclusione si ha che il numero di *frequenze naturali diverse da zero* è pari al numero di elementi reattivi meno il numero di nodi formati da elementi induttivi e/o generatori indipendenti di corrente, meno il numero di maglie costituite da condensatori e/o generatori indipendenti di tensione, mentre il numero di *frequenze naturali uguali a zero* è pari al numero delle maglie formate da induttori più il numero degli insiemi di taglio formati da condensatori.

5 Analisi nel dominio della variabile S (Laplace)

Abbiamo visto che per studiare il comportamento a regime permanente di un circuito RLC, è possibile utilizzare il calcolo simbolico, che ci permette di ricondurre l'equazione integro differenziale, rappresentativa dell'equilibrio elettrico del circuito, ad un'equazione algebrica, la stessa cosa può essere fatta per lo studio dei transitori, lo strumento mediante il quale ciò è possibile è la *trasformata di Laplace*.

La legge di trasformazione secondo Laplace è espressa dalla relazione

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{5.1}$$

con $s = \alpha + j\omega$.

spesso si dice che $F(s)$ è la L-trasformata di $f(t)$, cioè $F(s) = L[f(t)]$, l'operazione inversa è l'antitrasformazione, questa si indica con L^{-1} si ha quindi $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ ed è espressa dalla relazione

$$f(t) = \int_{\alpha-j\omega}^{\alpha+j\omega} F(s)\frac{e^{st}}{2j\pi}ds \tag{5.2}$$

Ricordiamo ora le principali proprietà in base alle quali si procede alla operazione di L-trasformazione:

- ***L-trasformata di una costante***. Se a è una costante si ha:

$$\mathrm{L}[a] = a\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{a}{s}$$

- ***L-trasformata di una somma***. La L-trasformata di una somma è la somma della L-trasformate.

$$\mathrm{L}\left[\sum_k f_k(t)\right] = \sum_k \mathrm{L}[f_k(t)]$$

- ***L-trasformata del prodotto per una costante***. La L-trasformata del prodotto di una funzione $f(t)$ per uno scalare h è uguale al prodotto dello scalare per la L-trasformata della funzione.

$$\mathrm{L}[h \cdot f(t)] = h \cdot \mathrm{L}[f(t)]$$

- ***L-trasformata della derivata***. La L-trasformata della derivata di una funzione è uguale al prodotto della variabile complessa s per la L-trasformata della funzione data, meno un termine costante uguale al limite a cui tende la funzione, quando t tende a zero per valori positivi.

$$\mathrm{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s\,\mathrm{L}[f(t)] - f(0^+)$$

- ***L-trasformata dell'integrale***. La L-trasformata dell'integrale di una funzione è uguale alla L-trasformata della funzione, divisa per la variabile s.

$$\mathrm{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}\mathrm{L}[f(t)]$$

Vogliamo quindi trasformare l'equazione integro differenziale (1) secondo Laplace, consideriamo però il caso generale, cioè il caso in cui le condizioni iniziale del circuito non siano nulle, in tale situazione pertanto la (4.1) diventa:

$$v - L\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\int_0^t idt - v_c(0) = Ri \tag{5.3}$$

Dove $v_c(0)$ è la tensione sul condensatore all'istante iniziale. Prima di L-trasformare la (5.3) è comunque necessario ricordare che

$$\mathrm{L}\left[L\frac{di_L}{dt}\right] = sLI_L(s) - Li_L(0) \tag{5.4}$$

Con $i_L(0)$ corrente che circola nell'induttore all'istante iniziale, e che

$$\mathrm{L}\left[\frac{1}{C}\int_0^t idt\right] = \frac{I(s)}{Cs} \tag{5.5}$$

si ha pertanto che la trasformata della (5.3) è quindi:

$$V(s) - sLI(s) + Li_L(0) - \frac{v_c(0)}{s} - \frac{1}{Cs}I(s) = RI(s) \tag{5.6}$$

che scritta in forma diversa diventa:

$$V(s) + Li_L(0) - \frac{v_c(0)}{s} = \left(R + sL + \frac{1}{Cs}\right)I(s) \tag{5.7}$$

Alla (5.7) è possibile allora associare un circuito, cioè essa rappresenta l'equilibrio elettrico del circuito mostrato in fig. 29

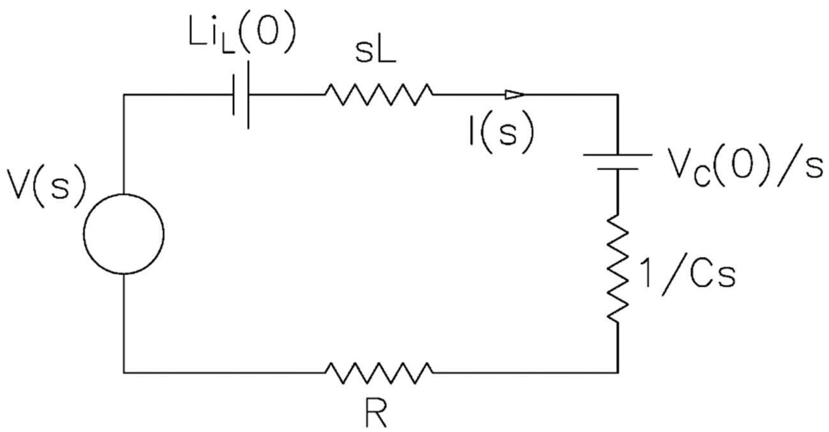


Figura 29 - Circuito L-trasformato.

come è possibile notare gli induttori e i condensatori si trasformano nell'insieme di un generatore e di un resistore, per stabilire il verso che devono avere tali generatori è necessario ricordare che questi devono tendere a mantenere lo stato iniziale, per comprendere meglio quanto detto è utile dare un'occhiata agli esempi illustrati in fig. 30.

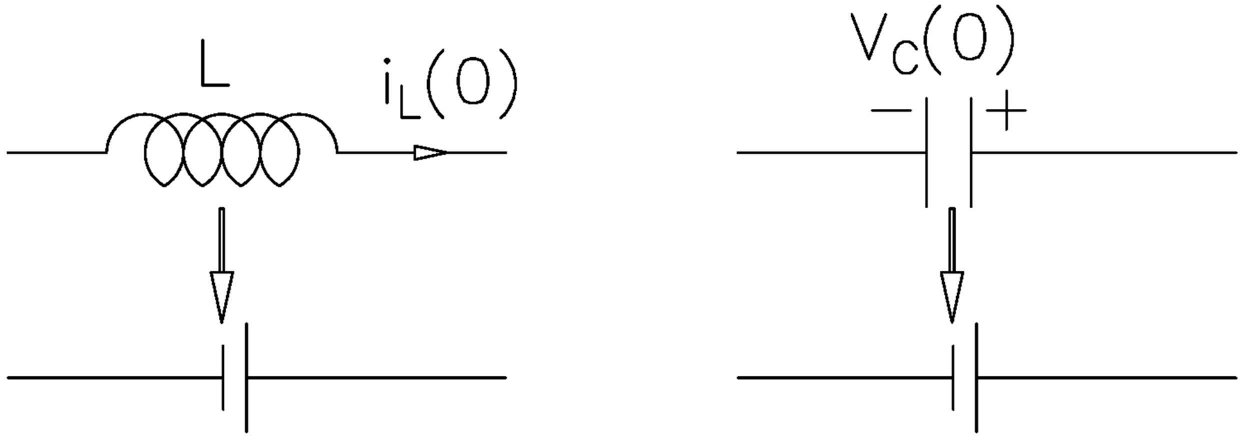


Figura 30

Supponiamo adesso che le condizioni iniziali siano nulle, cioè che $v_c(0) = i_L(0) = 0$, in tale situazione la (5.7) diventa:

$$V(s) = \left(R + sL + \frac{1}{Cs} \right) I(s) \tag{5.8}$$

la quantità $\left(R + sL + \frac{1}{Cs} \right)$ è la *funzione di trasferimento*, proprio per come essa è definita, infatti basta ricordare che la funzione di trasferimento è la risposta all'impulso (si ricordi che la trasformata dell'impulso è 1), di un sistema scarico. Per analogia con la legge di Ohm tale quantità prende il nome di impedenza operazionale

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R + sL + \frac{1}{Cs} \tag{5.9}$$

pertanto la (5.8) nella forma $V(s) = Z(s)I(s)$ è detta *legge di Ohm operazionale*.

Ovviamente, una volta trovata la corrente $I(s)$ è necessario antitrasformare per trovare l'espressione della corrente nel dominio del tempo, questo non sempre risulta semplice a causa della presenza della trasformata della forzante spesso non facilmente antitrasformabile.
In tutti i casi, antitrasformando, si ottengono tutte le componenti transitorie e tutte le componenti di regime, soltanto che a differenza del caso visto prima (dominio del tempo) in cui si distinguevano sia le componenti transitorie relative alla risposta a ingresso nullo, sia quelle relative alla risposta a stato zero, questa volta non è possibile distinguere le componenti transitorie dovute alla forzante da quelle dovute allo stato iniziale.
È quindi ormai chiaro che questo modo di procedere offre grossi vantaggi, ma ne perde altri offerti dal primo metodo visto, inoltre a volte, potrebbe risultare di difficile applicazione a causa della necessità di antitrasformare.

6 Richiami sulla funzione di trasferimento

Supponiamo che un sistema sia sollecitato da una perturbazione rappresentata dalla funzione $f(t)$ e che $r(t)$ sia la risposta che esso dà ad $f(t)$ *quando non è soggetto ad alcun'altra sollecitazione, è ovvio pertanto che l'ipotesi assunta comporta che il sistema sia inizialmente scarico*.

Siano $F(s) e\ R(s)$ le rispettive trasformate:

$$F(s) = L[f(t)]$$
$$R(s) = L[r(t)]$$

Chiameremo funzione di trasferimento $T(s)$ del sistema, la funzione di variabile complessa espressa dal rapporto fra $R(s)$ e $F(s)$:

$$T(s) = \frac{R(s)}{F(s)}$$

Con riferimento alla (5.9) abbiamo:

$$T(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{Z(s)}$$

Come si rileva da questa espressione, e come può affermarsi in generale, in virtù delle L-trasformate, *la funzione di trasferimento di un sistema lineare è determinata univocamente dalle caratteristiche proprie del sistema ed è indipendente dal tipo di perturbazione applicata.*

Essa quindi costituisce un elemento caratteristico proprio del sistema, in base al quale è possibile dedurre immediatamente il suo comportamento allorché viene sollecitato da una perturbazione.

La funzione di trasferimento di un sistema lineare è suscettibile di una interpretazione fisica particolarmente utile per il calcolo della risposta ad una perturbazione prolungata.

Supponiamo infatti di applicare ad un sistema, all'istante t=0, una perturbazione rappresentata dalla funzione impulsiva $\delta(t)$ e consideriamo la relativa risposta $r(t)$ del sistema.

Poiché, per quanto visto, $L[\delta(t)] = 1$, la funzione di trasferimento del sistema risulta:

$$T(s) = \frac{L[r(t)]}{L[\delta(t)]} = L[r(t)]$$

Vale a dire, *la funzione di trasferimento di un sistema lineare, coincide con la L-trasformata della risposta all'impulso unitario applicato all'istante zero con sistema inizialmente scarico.*

7 Evoluzione libera

Per ovviare alle difficoltà connesse all'antitrasformazione, è possibile usare un terzo metodo chiamato *metodo dell'evoluzione libera*, che però purtroppo non sempre può essere applicato, infatti è *necessario che il circuito ammetta regime permanente sia prima, sia dopo il periodo transitorio*.

In ogni istante siamo certi, grazie alle equazioni di continuità relative agli induttori ed ai condensatori che tengono conto dell'inerzialità degli induttori rispetto alla propria corrente e dei condensatori rispetto alla propria tensione, che:

- *la corrente che circola nell'induttore (risposta del sistema in corrente) è data dalla somma di una componente transitoria e di una componente permanente relativa al regime seguente il transitorio (regime permanente finale), cioè* $i_L = i_{Lt} + i_{Lp}$*;*
- *la tensione ai morsetti del condensatore (risposta del sistema in tensione) è data dalla somma di una componente transitoria e di una componente permanente relativa al regime seguente il transitorio (regime permanente finale), cioè* $v_C = v_{Ct} + v_{Cp}$*;*

detto ciò è possibile riscrivere l'equazione differenziale rappresentativa dell'equilibrio elettrico del circuito

$$v - L\frac{di_L}{dt} - v_c = Ri \tag{6.1}$$

nel seguente modo:

$$v - L\frac{di_{Lt}}{dt} - L\frac{di_{Lp}}{dt} - v_{ct} - v_{cp} = Ri_t + Ri_p \tag{6.2}$$

e questa può essere spezzata nelle due equazioni:

$$\begin{cases} v - L\dfrac{di_{Lp}}{dt} - v_{cp} = Ri_p \\ 0 - L\dfrac{di_{Lt}}{dt} - v_{ct} = Ri_t \end{cases} \tag{6.3}$$

La prima equazione delle (6.3) è rappresentativa del regime permanente finale, e può essere risolta con i metodi noti (ad esempio calcolo simbolico), la seconda equazione delle (6.3) è invece rappresentativa del regime transitorio, ed è pertanto necessario che la stessa sia L-trasformata, ottenendo così il circuito di fig. 31, chiamato *circuito L-trasformato dell'evoluzione libera*.

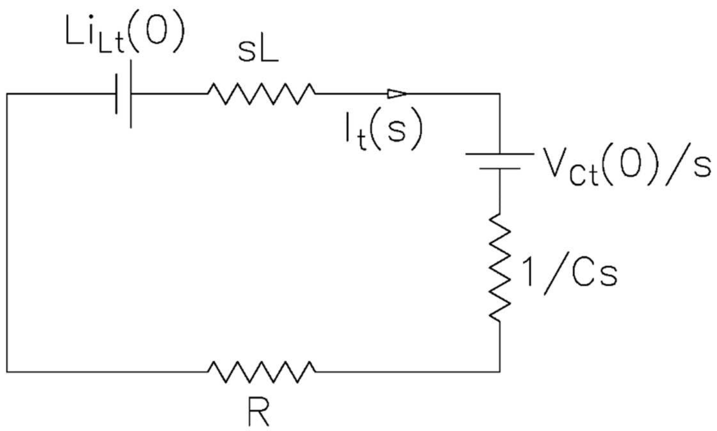


Figura 31 - Circuito L-trasformato dell'evoluzione libera.

E l'equazione dell'equilibrio è:

$$0 = RI_t(s) + sLI_t(s) - Li_{Lt}(0) + \frac{v_{ct}(0)}{s} + \frac{I_t(s)}{sC} \tag{6.4}$$

Il grosso vantaggio sta nel fatto che questa volta non vi è la presenza della forzante e quindi antitrasformare la $I_t(s)$ risulta abbastanza agevole. E' necessario però fare attenzione al fatto che questa volta $i_{Lt}(0) = i_L(0) - i_{Lp}(0)$ e $v_{Ct}(0) = v_c(0) - v_{cp}(0)$ sono le componenti transitorie calcolate all'istante iniziale del transitorio, sono cioè i valori di corrente e di tensione che si hanno nei bipoli L e C nell'istante in cui ha inizio il transitorio. Anche con questo metodo non è possibile però distinguere le componenti transitorie dovute alla forzante da quelle dovute alle condizioni iniziali; infatti antitrasformando la $I_t(s)$, otteniamo tutte le componenti transitorie che interessano il sistema

In base a tali conclusioni, la risposta del circuito può immaginarsi come la somma, istante per istante, delle risposte di due circuiti ideali distinti nei quali può pensarsi *sdoppiato il circuito reale*.
Il primo dei due, che chiameremo ***circuito equivalente del regime permanente***, ha un regime che coincide con quello permanente finale del circuito reale. Esso *si identifica con il circuito reale nella sua condizione finale di funzionamento e non è soggetto ad alcuna perturbazione*.
L'andamento (permanente) che in esso assumono le varie grandezze costituisce la *componente permanente* i_{Lp}, v_{cp} della risposta del circuito reale alla perturbazione.

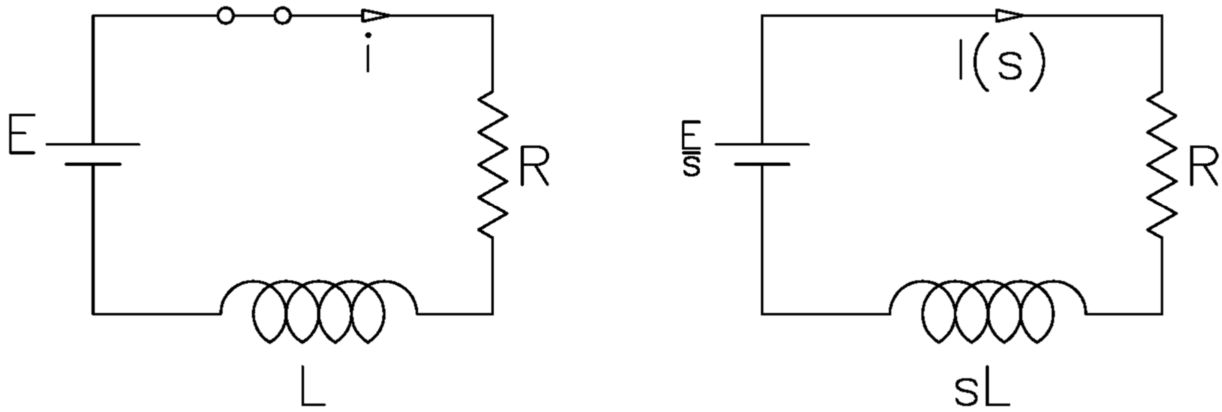
Il secondo circuito, che chiameremo ***circuito equivalente dell'evoluzione libera***, ha un comportamento che si identifica con l'evoluzione libera del circuito reale. Esso *ha una struttura che si deduce da quella finale del circuito reale eliminando tutte le sollecitazioni applicate dall'esterno e inserendovi invece le sollecitazioni costituite dalla presenza in esso, all'istante dell'applicazione della perturbazione* $(t = 0)$*, della componente transitoria della corrente nell'induttanza* $i_{Lt}(0) = i_L(0) - i_{Lp}(0)$ *e della componente transitoria della tensione alle armature del condensatore* $v_{Ct}(0) = v_c(0) - v_{cp}(0)$.
L'andamento delle varie grandezze in tale circuito costituisce la *componente transitoria* i_{Lt}, v_{ct} della risposta del circuito reale alla perturbazione.

La schematizzazione del fenomeno mediante lo sdoppiamento del circuito reale nei due circuiti ideali descritti, mette in evidenza che:

- la componente permanente della risposta del circuito non è condizionata dai fenomeni transitori; essa non è influenzata dalla carica energetica iniziale posseduta dal circuito all'inizio del transitorio e quindi è indipendente dall'istante di applicazione della perturbazione;
- la componente transitoria della risposta è indipendente singolarmente da ciascuno dei due regimi permanenti (iniziale e finale) del circuito; essa dipende solo dal divario esistente fra la carica energetica reale posseduta dal circuito all'istante di applicazione della perturbazione e quella che possiederebbe, nello stesso istante, se esso assumesse istantaneamente il regime permanete finale.

In precedenza, risolvendo l'equazione differenziale nel dominio del tempo (utilizzando cioè il primo metodo), abbiamo trovato la legge di carica dell'induttore, vogliamo vedere adesso come sia possibile fare la stessa cosa utilizzando sia il metodo della trasformata di Laplace (secondo metodo), sia quello dell'evoluzione libera (terzo metodo).

Consideriamo il circuito di fig. 32



a) Circuito reale *b) Circuito L-trasformato*

Figura 32 – Carica di L.

scrivendo l'equazione alla maglia ERLE, si ottiene

$$E - L\frac{di}{dt} = Ri$$

che L-trasformata diventa:

$$\frac{E}{s} - sLI(s) + \mathrm{L}\, i_L(0) = RI(s)$$

vogliamo trovare l'espressione della corrente di carica dell'induttore e pertanto supponiamo che le condizioni iniziali siano nulle, ovvero che $i_L(0) = 0$, si ha quindi

$$\frac{E}{s} = \left(R + sL\right) I(s) \rightarrow I(s) = \frac{E/s}{R + sL} \tag{6.5}$$

questa rappresenta quindi la risposta a stato zero ed il relativo circuito è quello rappresentato in fig. 2; per trovare quindi l'espressione istantanea della corrente è sufficiente antitrasformare l'equazione (6.5).

Vediamo adesso come è possibile procedere, per lo stesso sistema, utilizzando il metodo dell'evoluzione libera, premettendo che in questo caso è possibile applicarlo perché il circuito ammette regime permanente prima e dopo il transitorio.

Abbiamo detto che è necessario conoscere i valori delle componenti transitorie all'istante iniziale e per trovarli ricordando che $i_L = i_{Lt} + i_{Lp}$, otteniamo

$$i_{Lt}(0) = i_L(0) - i_{Lp}(0) \tag{6.6}$$

Ricordando che i_{Lp} è la corrente nel regime permanente successivo e, quindi per $t \gg 0$, abbiamo:

$$i_{Lp} = \frac{E}{R}$$

inoltre essendo i_L la corrente nel regime permanente precedente e, quindi per $t < 0$, si ha:

$$i_L = 0$$

a questo punto costruiamo la seguente tabella

$t < 0$	$t = 0$	$t \gg 0$
$i_L = 0$	$i_L(0) = 0$	$i_{Lp} = \frac{E}{R}$
	$i_{Lp}(0) = \frac{E}{R}$	
	$i_{Lt}(0) = i_L(0) - i_{Lp}(0) = 0 - \frac{E}{R} = -\frac{E}{R}$	

L'equazione che quindi, in questo caso, va L-trasformata è:

$$-L\frac{di_{Lt}}{dt} = Ri_t$$

per cui si ha:

$$Li_{Lt}(0) = sLI_t(s) + RI_t(s) = \left(R + sL\right)I_t(s) \tag{6.7}$$

ed il circuito L-trasformato dell'evoluzione libera è:

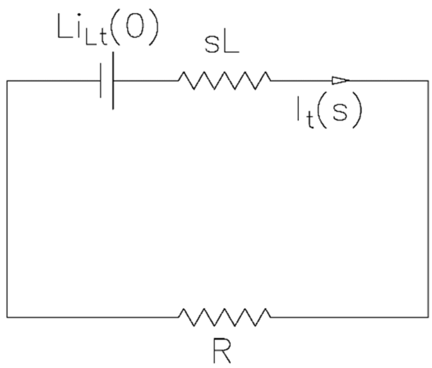


Figura 33 - Circuito L-trasformato dell'evoluzione libera.

Dalla equazione (6.7) si ricava:

$$I_t(s) = \frac{Li_{Lt}(0)}{R + sL}$$

che antitrasformata rappresenta la componente transitoria della corrente. È evidente che antitrasformare la relazione ottenuta è molto più semplice che antitrasformare la (6.5), in conclusione per trovare l'andamento della corrente di carica, ovviamente, alla componente transitoria ottenuta bisogna sommare quella permanente scritta in tabella.

8 L trasformata di un accoppiamento mutuo

Consideriamo un circuito del tipo mostrato in fig.34 e vogliamo vedere come si L-trasforma.

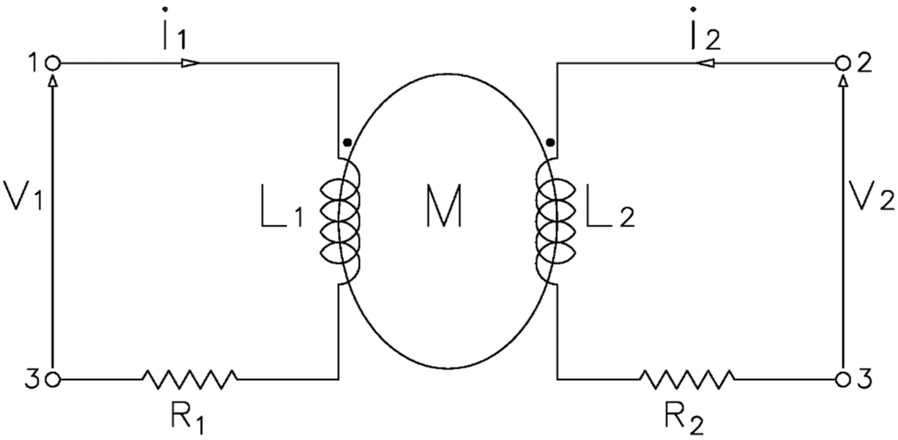


Figura 34 - Circuito con accoppiamento induttivo.

Scriviamo innanzitutto le equazioni alle due maglie:

$$\begin{cases} v_1 - L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M \dfrac{di_2}{dt} = R_1 i_1 \\ v_2 - L_2 \dfrac{di_2}{dt} - M \dfrac{di_1}{dt} = R_2 i_2 \end{cases}$$

L-trasformando si ottiene

$$\begin{cases} V_1(s) - sL_1 I_1(s) + L_1 i_1(0) - sMI_2(s) + Mi_2(0) = R_1 I_1(s) \\ V_2(s) - sL_2 I_2(s) + L_2 i_2(0) - sMI_1(s) + Mi_1(0) = R_2 I_2(s) \end{cases}$$

il circuito che si ottiene è quindi quello rappresentato in fig. 35. Solitamente è comunque conveniente scrivere le equazioni in termini istantanei, e L-trasformare senza disegnare il circuito.

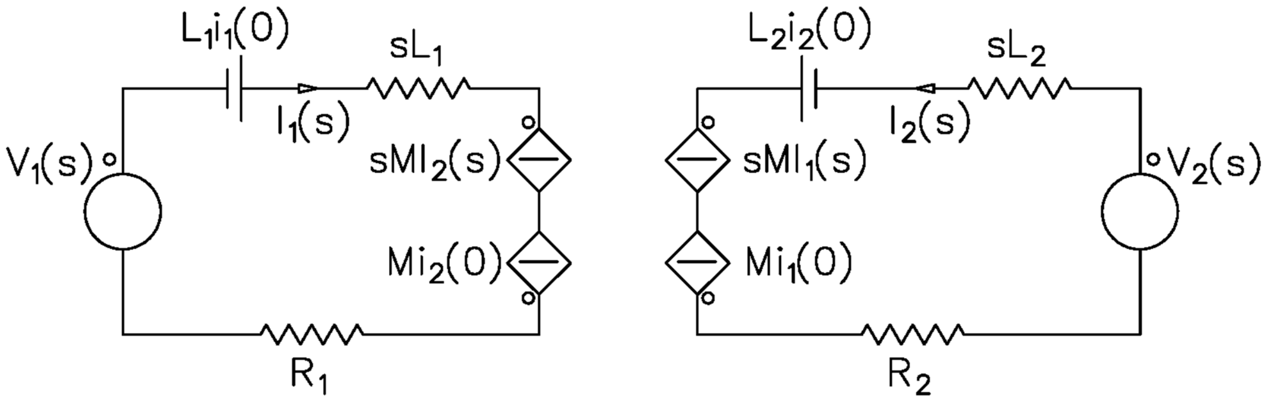


Figura 35 - Circuito L-trasformato di un accoppiamento induttivo.

Sommario