

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA  
*Dipartimento di Ingegneria*  
*Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina*

## ***Appunti Corso di Elettrotecnica***

***Sistemi Trifase Capitoli 1, 2, 3***

*Anno Accademico 2022-2023*

*prof. ing. Bruno Azzerboni*

***Fonti:***

***Lezioni di Elettrotecnica Generale - Giulio Battistini***

***Colombo Corsi Pisa***

***M. Fauri “Electrical Systems Engineering” Lezione 9***

## Sistemi trifase

### 1 Generalità

Si consideri un supporto cilindrico (*armatura*) (figura 1) alla cui periferia siano collocate, in corrispondenza dei piani diametrali, tre bobine aventi rispettivamente  $N_1, N_2, N_3$  spire e disposte in maniera che, percorrendole dai terminali iniziali  $1_p, 2_p, 3_p$  ai terminali finali  $1_f, 2_f, 3_f$  risultino avvolte, rispetto all'armatura, tutte nello stesso senso.

Se l'armatura ruota con velocità angolare costante  $\omega$  in un *campo magnetico costante nel tempo e con distribuzione spaziale qualsiasi*, si generano nelle bobine tre f.e.m., di tipo mozionale, *periodiche che hanno tutte lo stesso periodo, la stessa forma d'onda e risultano sfasate nel tempo, l'una rispetto all'altra, di un angolo pari all'angolo di sfasamento spaziale fra gli assi delle bobine cablate sull'armatura.*

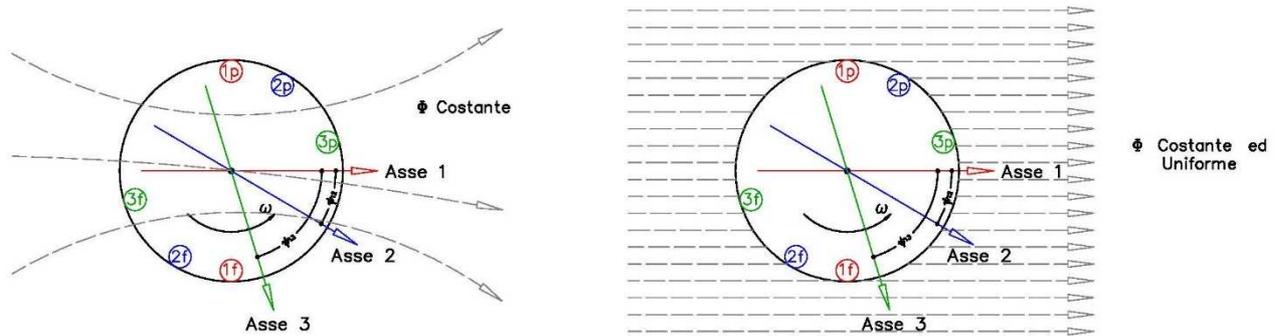


Figura 1

Se invece l'armatura ruota con velocità angolare costante  $\omega$  in un *campo costante nel tempo ed avente distribuzione spaziale uniforme*, le f.e.m. indotte sono *sinusoidali isofrequenziali e risultano sfasate nel tempo, l'una rispetto all'altra, di un angolo pari all'angolo di sfasamento spaziale fra gli assi delle bobine cablate sull'armatura.*

Se poi le bobine disposte alla periferia del cilindro rotante con velocità angolare costante  $\omega$  in un *campo magnetico costante nel tempo e con distribuzione spaziale uniforme*, hanno tutte lo stesso numero di spire e sono collocate in corrispondenza dei piani diametrali e formano tra loro angoli uguali, quindi con gli assi sfasati nello spazio a  $120^\circ$  l'uno dall'altro (figura 2), allora le *f.e.m. generate sono sinusoidali isofrequenziali, di uguale ampiezza e si susseguono nel senso ciclico prestabilito con uguale differenza di fase reciproca.*

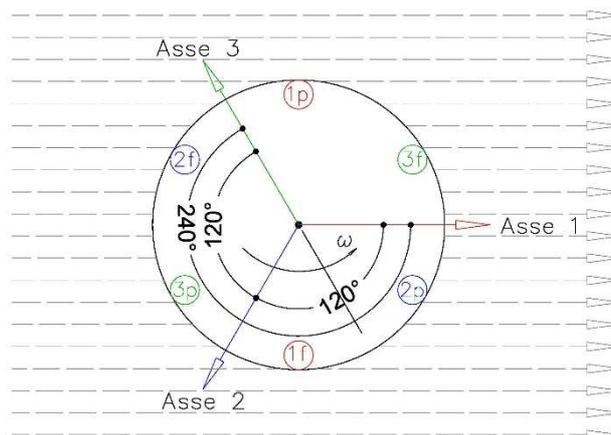


Figura 2

Ciascuna tensione prende il nome di *fase*. E' chiaro che le fasi si succedono, nel tempo, come indicato in figura 2, finché il senso di rotazione del cilindro continua ad essere quello indicato. Se invece il senso di rotazione venisse invertito, mantenendo costante il valore della velocità, anche i rapporti di fase delle singole f.e.m. indotte risulterebbero invertiti. Quindi, una volta fissato l'ordine di successione delle fasi e quindi delle rispettive f.e.m., chiameremo *senso ciclico diretto* quello per il quale le tensioni si susseguono nell'ordine prestabilito; chiameremo *senso ciclico inverso*, quello per il quale l'ordine di successione risulta inverso. *Usualmente si adotta come senso ciclico diretto, quello orario.*

### 1.1 Sistemi simmetrici di tensioni

Un sistema come quello considerato, le cui tensioni sono sinusoidali isofrequenziali di uguale ampiezza, sfasate tra loro di  $120^\circ$  in senso ciclico diretto (orario), si dice **sistema trifase simmetrico di tensioni**. L'espressione istantanea delle tensioni è quindi:

$$\begin{aligned} v_1 &= V_M \sin \omega t \\ v_2 &= V_M \sin \left( \omega t - \frac{2}{3}\pi \right) \\ v_3 &= V_M \sin \left( \omega t - \frac{4}{3}\pi \right) \end{aligned}$$

Nella rappresentazione simbolica, in forma esponenziale e in forma canonica, le tensioni sono espresse da:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= V_M & \dot{V}_1 &= V_M \\ \dot{V}_2 &= V_M e^{-j\frac{2}{3}\pi} & \dot{V}_2 &= V_M \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \dot{V}_3 &= V_M e^{-j\frac{4}{3}\pi} & \dot{V}_3 &= V_M \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

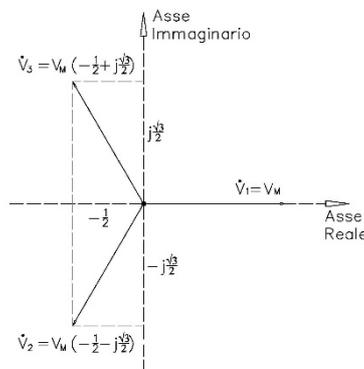


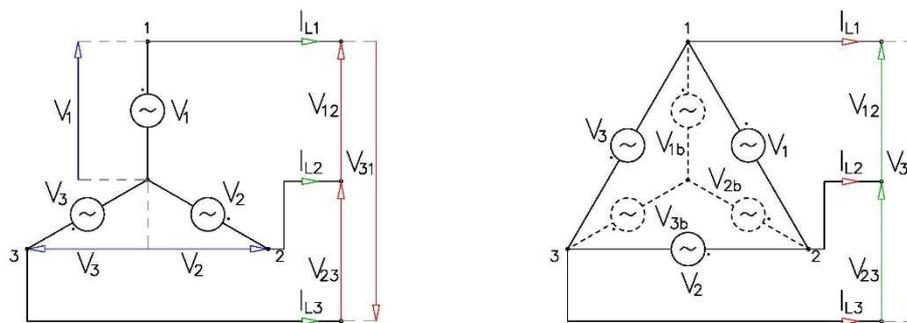
Figura 3

Le terne simmetriche di tensioni sono, ovviamente pure, cioè godono della proprietà che la *somma dei valori istantanei delle tensioni è nulla ad ogni istante ed è quindi nulla anche la somma geometrica dei vettori rappresentativi di esse*.

*I tipi fondamentali di collegamento interfase fra le tensioni, usati nella tecnica, sono due: il collegamento a stella ed il collegamento a triangolo (figura 4).*

Esaminando i collegamenti interfascici, si rileva che le tensioni fra i morsetti di un sistema trifase possono coincidere, o no, con le tensioni ai terminali delle fasi, a seconda del tipo di collegamento.

Chiameremo pertanto **tensioni di fase  $V_f$**  le tensioni esistenti fra i terminali di ciascuna fase e **tensioni di linea  $V_l$**  o **tensioni concatenate** le tensioni fra due morsetti consecutivi del sistema trifase.

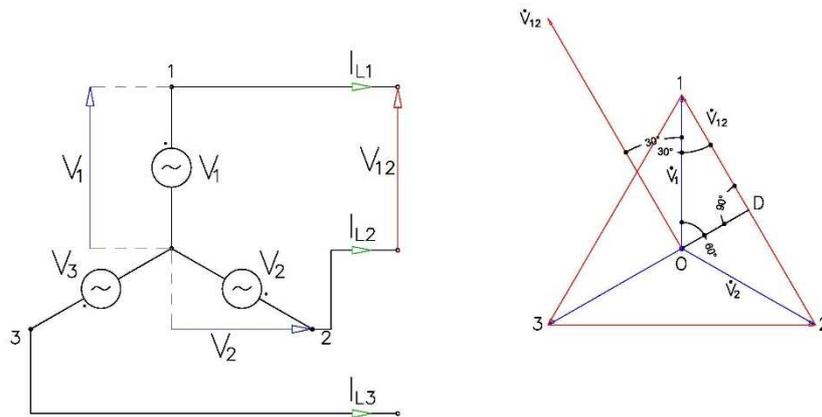


- Grandezze di Linea Coincidenti con Grandezze di Fase
- Grandezze di Linea
- Grandezze di Fase

Figura 4

La figura 4 mostra che nel *collegamento a triangolo* le tensioni di linea si identificano con le tensioni di fase; nel *collegamento a stella*, invece, le tensioni di linea sono uguali alla differenza fra due consecutive tensioni di fase le quali, in questo tipo di collegamento, coincidono ovviamente con le tensioni esistenti fra ciascuno dei morsetti delle fasi ed il centro stella o morsetto del neutro.

Se il sistema delle tensioni è simmetrico, dalla figura 5 si deduce, con banali considerazioni geometriche, che nel collegamento a stella le tensioni di linea hanno intensità uguale a quella delle tensioni di fase moltiplicata per  $\sqrt{3}$  e sono in anticipo di  $\frac{\pi}{6}$  rispetto ad esse.



$$\begin{aligned} \dot{V}_{12} &= \dot{V}_1 - \dot{V}_2 \\ \overline{1D} = \overline{D2} &= \frac{|\dot{V}_{12}|}{2} \\ \overline{1D} &= V_1 \cos \frac{\pi}{6} = V_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ |\dot{V}_{12}| &= 2 \times \overline{1D} = 2V_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}V_1 \\ \dot{V}_{12} &= \sqrt{3}V_1 e^{j\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

Figura 5

Può concludersi pertanto che *nei sistemi simmetrici collegati a triangolo, le tensioni di linea si identificano con le tensioni di fase; in quelli collegati a stella, la terna delle tensioni di linea si deduce dalla terna delle tensioni di fase ruotando solidalmente la stella dei vettori in anticipo di  $\frac{\pi}{6}$  e moltiplicandone la lunghezza per  $\sqrt{3}$ .*

È quasi superfluo rilevare che la terna delle tensioni di linea è sempre una terna pura (poligonale chiusa).

## 1.2 Sistemi equilibrati di correnti

Applichiamo le tensioni di un sistema trifase  $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$  a tre circuiti distinti (figura 6),

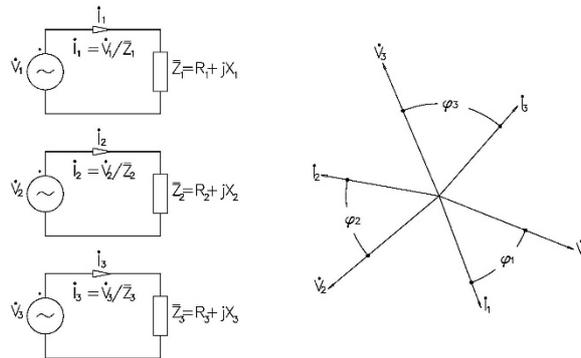


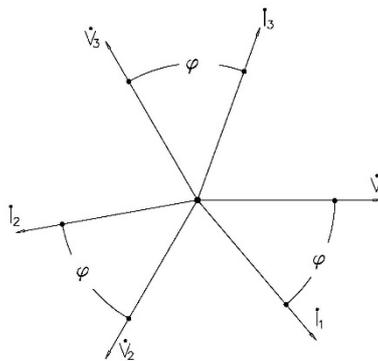
Figura 6

questi vengono percorsi dalle correnti:

$$i_1 = \frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}_1} \quad i_2 = \frac{\dot{V}_2}{\bar{Z}_2} \quad i_3 = \frac{\dot{V}_3}{\bar{Z}_3}$$

che risultano legate fra loro dalle relazioni costanti che dipendono, ovviamente, dalle relazioni esistenti fra le tensioni e dai parametri degli stessi circuiti. Un sistema di correnti, come quelle che percorrono i circuiti considerati, legate tra loro da relazioni costanti di ampiezza e di fase, si dice **sistema trifase di correnti**. Il complesso delle impedenze che, alimentato da un sistema trifase di tensioni, è percorso da un sistema trifase di correnti, si dice **carico trifase**. I singoli rami contenenti le impedenze si dicono **fasi del carico**.

Quando il sistema delle tensioni è simmetrico e le impedenze delle fasi sono uguali tra di loro (**carico equilibrato**), le correnti generate hanno uguale ampiezza, uguale differenza di fase rispetto alla tensione che le genera e, di conseguenza, uguale differenza di fase tra loro (figura 7).



$$\bar{Z} = R + jX$$

$$I_M = \frac{V_M}{Z}$$

$$i_1 = I_M \sin(\omega t - \varphi)$$

$$i_2 = I_M \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$i_3 = I_M \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$\dot{i}_1 = I e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$\dot{i}_2 = I e^{j(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi)}$$

$$\dot{i}_3 = I e^{j(\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi)}$$

Figura 7

Un sistema di correnti come questo, le cui correnti sono sinusoidali isofrequenziali di uguale ampiezza, sfasate tra loro di  $120^\circ$  in senso ciclico diretto (orario), si dice **sistema trifase equilibrato di correnti**.

È immediato rilevare che anche per i sistemi equilibrati di correnti vale la proprietà fondamentale, già vista per i sistemi simmetrici di tensione, in virtù della quale la *somma dei valori istantanei delle correnti è nulla ad ogni istante ed è quindi nulla anche la somma geometrica dei vettori rappresentativi di esse*.

Le due tipi fondamentali di interconnessione che usualmente si adottano nella pratica, per i carichi trifase sono, analogamente a quanto visto per le tensioni, l'interconnessione a stella e quella a triangolo (figura 8).

Esaminando i collegamenti interfascici, si rileva che le correnti che percorrono i conduttori che collegano i morsetti del sistema generatore ai morsetti del carico trifase possono coincidere, o no, con le correnti che percorrono le singole fasi del carico (o del sistema generatore) a seconda del tipo di interconnessione adottato.

Chiameremo pertanto **correnti di fase  $I_f$**  le correnti che percorrono le singole fasi e **correnti di linea  $I_L$**  quelle che percorrono i conduttori della linea di collegamento fra il sistema generatore ed il carico (non considerando l'eventuale conduttore di collegamento fra i neutri).

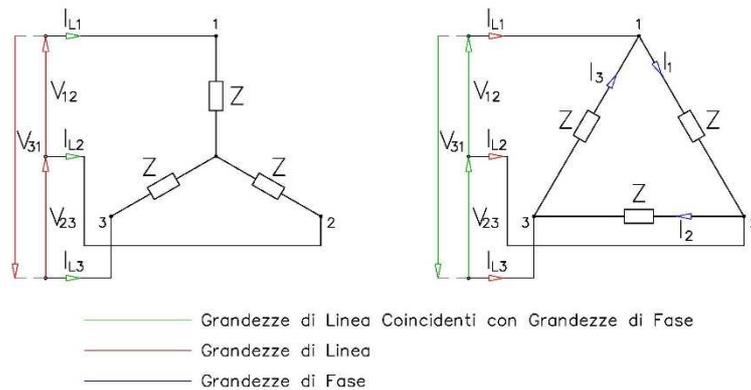
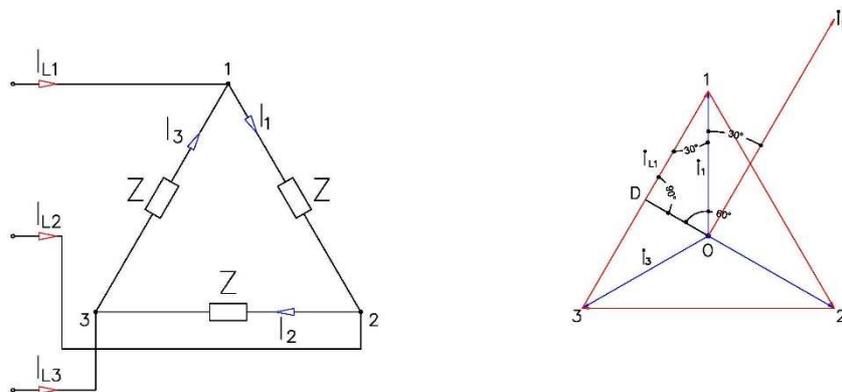


Figura 8

La figura 8 mostra che nel collegamento a stella le correnti di linea si identificano con le correnti di fase; nel collegamento a triangolo, invece, le correnti di linea sono uguali alla differenza fra due consecutive correnti di fase.

Se il sistema delle correnti è equilibrato, dalla figura 9 si deduce, con banali considerazioni geometriche, che nel collegamento a triangolo le correnti di linea hanno intensità uguale a quella delle correnti di fase moltiplicata per  $\sqrt{3}$  e sono in ritardo di  $\frac{\pi}{6}$  rispetto ad esse.



$$\begin{aligned}
 i_{L1} &= i_1 - i_3 \\
 \overline{1D} = \overline{D3} &= \frac{|i_{L1}|}{2} \\
 \overline{1D} &= I_1 \cos \frac{\pi}{6} = I_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 |i_{L1}| &= 2 \times \overline{1D} = 2 I_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} I_1 \\
 i_{L1} &= \sqrt{3} I_1 e^{-j\frac{\pi}{6}}
 \end{aligned}$$

Figura 9

Può concludersi pertanto che *nei sistemi equilibrati, con collegamento a stella (delle fasi del carico, rispettivamente delle fasi del generatore), le correnti di linea coincidono con le correnti di fase; con il collegamento a triangolo, il sistema delle correnti di linea si deduce dal sistema delle correnti di fase ruotando solidalmente la stella dei vettori in ritardo di  $\frac{\pi}{6}$  e moltiplicandone la lunghezza per  $\sqrt{3}$ .*

Anche per i sistemi equilibrati di correnti, le correnti di linea costituiscono un sistema puro ed i vettori rappresentativi di tali correnti formano una stella regolare.

## 2 Sistemi simmetrici ed equilibrati

Riassumendo, si rileva che *quando la regolarità della stella dei vettori rappresentativi è attribuita alle tensioni (qualunque sia il loro collegamento interfase) il sistema trifase si dice **simmetrico**; quando invece è attribuita alle correnti, il sistema si dice **equilibrato**. Si dicono inoltre equilibrati quei carichi trifase che (qualunque sia la loro interconnessione) hanno uguale impedenza in tutte le fasi.*

Pertanto possiamo avere quattro tipi diversi di sistemi trifase:

- Sistemi **simmetrici ed equilibrati**, nei quali si ha la simmetria delle tensioni e l'equilibrio nelle correnti. Essi si realizzano alimentando un carico trifase equilibrato mediante un sistema simmetrico di tensioni.
- Sistemi **simmetrici e squilibrati**, nei quali si ha la simmetria delle tensioni ma non l'equilibrio nelle correnti. Essi si realizzano alimentando un carico trifase squilibrato mediante un sistema simmetrico di tensioni.
- Sistemi **dissimmetrici ed equilibrati**, nei quali non si ha la simmetria delle tensioni ma l'equilibrio nelle correnti. Essi si realizzano in casi molto particolari, infatti le impedenze del carico devono avere proprio quei particolari valori per i quali le correnti prodotte da quelle determinate tensioni, si dispongono secondo una stella regolare.
- Sistemi **dissimmetrici e squilibrati**, nei quali non si ha né la simmetria delle tensioni né l'equilibrio nelle correnti. Essi si realizzano alimentando un carico trifase squilibrato mediante un sistema dissimmetrico di tensioni.

Quando mediante un sistema trifase di tensioni, si alimenta un carico trifase, il regime elettrico che si stabilisce nel sistema è diverso a seconda del collegamento interfase adottato per il sistema generatore e del tipo di interconnessione adottata per il carico. Le varie combinazioni che possono verificarsi sono quattro:

	Collegamento interfase delle tensioni	Interconnessione del carico
1)	Stella	Stella
2)	Stella	Triangolo
3)	Triangolo	Stella
4)	Triangolo	Triangolo

Conviene comunque, ai fini del calcolo del circuito, ricondurre ognuna delle quattro combinazioni alla prima o all'ultima di esse.

Per i sistemi simmetrici ed equilibrati, il calcolo è particolarmente agevole per la combinazione stella-stella, che si assume perciò come sistema tipico di tali sistemi.

Consideriamo tre circuiti monofase indipendenti (figura 10a), aventi uguale impedenza  $\bar{Z}$ , alimentati da tre generatori le cui tensioni  $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$ , costituiscono un sistema trifase simmetrico e che pertanto generano nei circuiti tre correnti  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ , costituenti un sistema equilibrato.

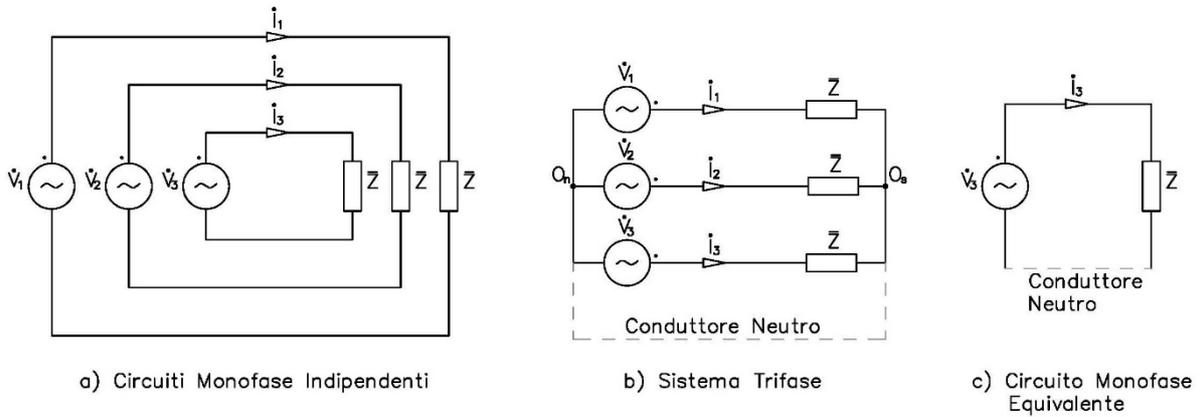


Figura 10

Se tutti i conduttori di ritorno sono ora riuniti fra loro in uno stesso conduttore (figura 10b), si ottiene un sistema trifase stella-stella, nel quale i morsetti delle fasi del generatore risultano collegati, mediante tre conduttori di linea, ai morsetti delle fasi del carico ed il neutro del generatore risulta collegato al centro stella del carico mediante un quarto conduttore che chiameremo **conduttore neutro**. Nel neutro vengono quindi convogliate tutte le correnti del sistema trifase; poiché esse costituiscono un sistema equilibrato e, di conseguenza, la loro somma è in ogni istante nulla, *il conduttore neutro risulta percorso da una corrente identicamente nulla e può quindi essere soppresso senza che niente muti nel regime elettrico del sistema*. Si rileva quindi che la d.d.p. fra il punto neutro del sistema generatore ed il centro stella del carico è anch'essa identicamente nulla.

Quest'ultima affermazione può anche essere constatata applicando Millmann tra  $O_n$  ed  $O_s$ :

$$\dot{V}_{O_s O_n} = \dot{E}_M = \frac{\frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}} + \frac{\dot{V}_2}{\bar{Z}} + \frac{\dot{V}_3}{\bar{Z}}}{\frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}}} = \frac{1}{\bar{Z}} \frac{(\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3)}{3}$$

Ed essendo la terna delle tensioni una terna simmetrica e quindi pura, si ottiene:

$$\dot{V}_{O_s O_n} = \dot{E}_M = \frac{\frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}} + \frac{\dot{V}_2}{\bar{Z}} + \frac{\dot{V}_3}{\bar{Z}}}{\frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}}} = \frac{1}{\bar{Z}} \frac{(\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3)}{3} = 0$$

Quando il sistema è simmetrico ed equilibrato, i tre circuiti monofase indipendenti che nel loro complesso sono equivalenti al sistema trifase, sono tutti uguali tra loro; quindi lo studio del regime del sistema trifase può ricondursi a quello di uno solo di essi. Pertanto il calcolo di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato può essere effettuato limitandoci ad eseguire il calcolo di un circuito monofase (figura 10c) così costituito:

- dalla tensione  $\dot{V}_h$  di una fase del generatore;
- dall'impedenza  $\bar{Z}$  di una fase del carico;
- da un conduttore della linea e dal conduttore neutro.

Applicando tale principio, ogni corrente  $\dot{I}_h$  del sistema trifase può dedursi immediatamente dalla rispettiva tensione dividendola per l'impedenza.

Per esempio abbiamo:

$$i_1 = \frac{\dot{V}_1}{Z} = \frac{V_1}{Z e^{j\varphi}} = \frac{V_1}{Z} e^{-j\varphi} = I_1 e^{-j\varphi}$$

E poiché il sistema è equilibrato, otteniamo le altre correnti ruotando in ritardo  $\dot{I}_1$  di  $120^\circ$  ed ancora di ulteriori  $120^\circ$

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= I_1 e^{-j\varphi} \\ \dot{I}_2 &= I_1 e^{-j(\frac{2}{3}\pi)} \\ \dot{I}_3 &= I_1 e^{-j(\frac{4}{3}\pi)} \end{aligned}$$

Il calcolo dei sistemi simmetrici ed equilibrati con collegamento interfascico a triangolo del sistema generatore, può essere ricondotto a quello con collegamento a stella, introducendo il concetto di *tensioni stellate*.

Dati i tre conduttori di linea di un sistema trifase e le relative tensioni concatenate  $\dot{V}_{12}, \dot{V}_{23}, \dot{V}_{31}$ , chiameremo **baricentro elettrico del sistema**, il punto  $O_b$  ottenuto unendo a stella tre impedenze uguali collegate ai conduttori di linea (figura 11).

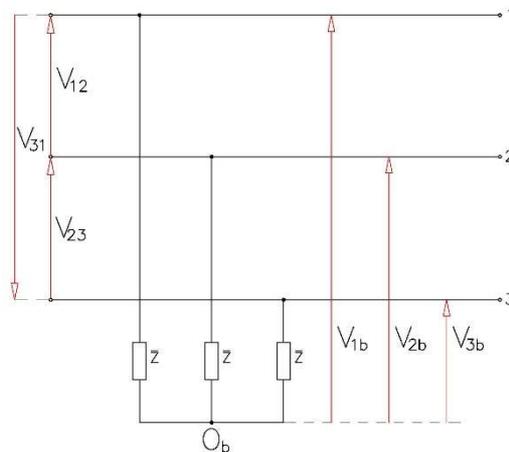


Figura 11

La definizione del baricentro elettrico, essendo riferita unicamente ai conduttori di linea, prescinde completamente dal collegamento interfascico del generatore. È evidente inoltre che in ogni sistema simmetrico ed equilibrato il baricentro  $O_b$  corrisponde al punto neutro  $O_n$  del generatore (nel senso che la d.d.p. fra i due è identicamente nulla) quando questo è connesso a stella e corrisponde altresì al centro stella di ogni carico equilibrato a stella connesso alla linea stessa.

Chiameremo poi **tensioni stellate baricentriche**  $\dot{V}_{1b}, \dot{V}_{2b}, \dot{V}_{3b}$  le tre tensioni esistenti fra ciascun conduttore di linea ed il baricentro. È superfluo notare anche che il baricentro elettrico del sistema coincide con il baricentro geometrico del triangolo i cui lati sono i vettori concatenati (tensioni di linea) della terna simmetrica di tensioni. Da quanto già detto, è chiaro che:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1b} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{V}_{12} e^{-j\frac{\pi}{6}} \\ \dot{V}_{2b} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{V}_{23} e^{-j\frac{\pi}{6}} \\ \dot{V}_{3b} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{V}_{31} e^{-j\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

La figura 12 riassume sinteticamente il calcolo di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato in tutti i casi possibili.

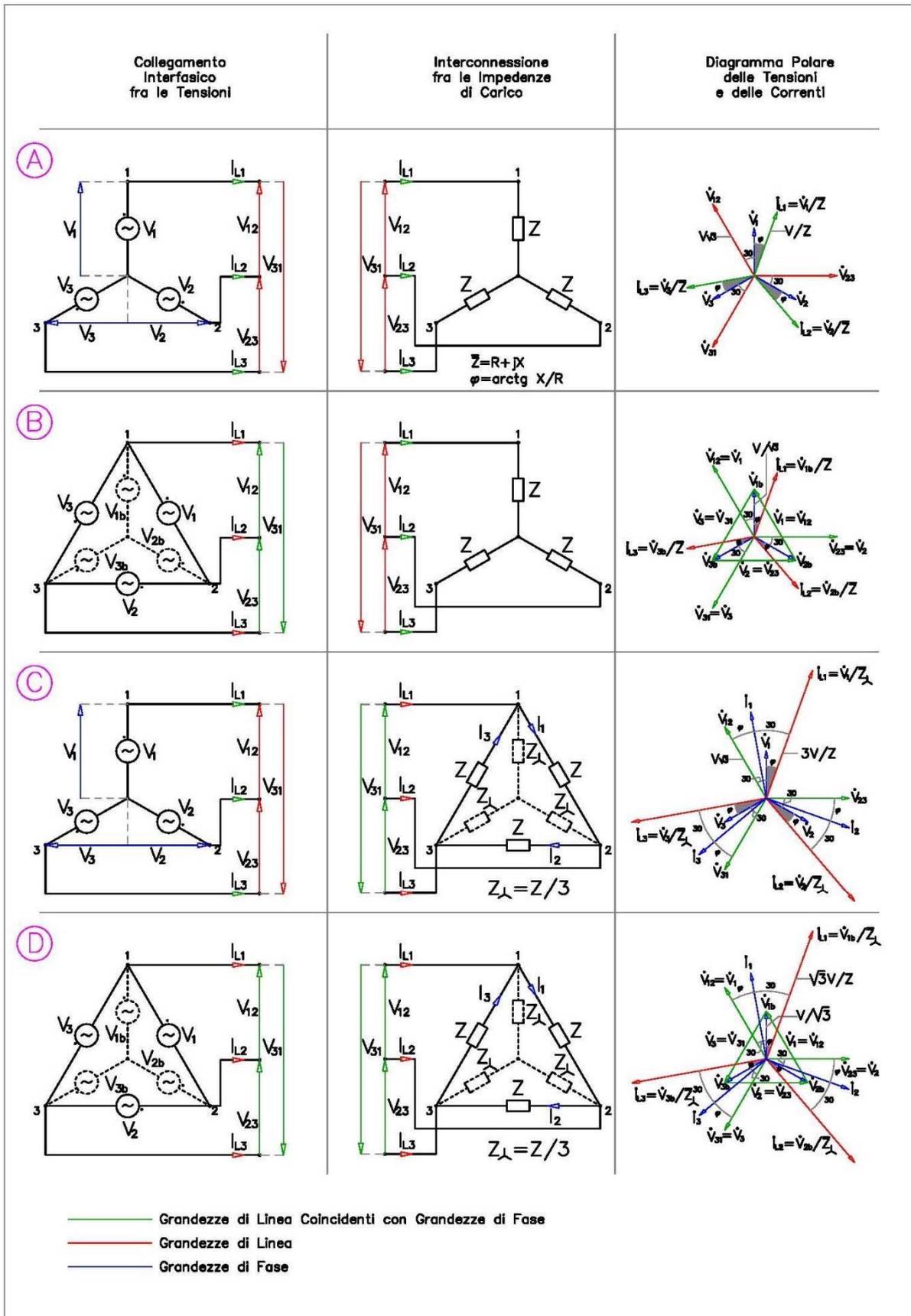


Figura 12

### 2.1 Potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati

Dato un sistema trifase simmetrico ed equilibrato, con collegamento stella-stella, le espressioni istantanee delle tensioni di fase e delle correnti di fase sono:

$$\begin{aligned} v_1 &= V_M \sin \omega t & i_1 &= I_M \sin(\omega t - \varphi) \\ v_2 &= V_M \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) & i_2 &= I_M \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi\right) \\ v_3 &= V_M \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) & i_3 &= I_M \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

Le potenze istantanee erogate da ciascun generatore sono:

$$\begin{aligned} p_1 &= v_1 i_1 = V_M \sin \omega t I_M \sin(\omega t - \varphi) = VI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = VI \cos \varphi - VI \cos(2\omega t - \varphi) \\ p_2 &= v_2 i_2 = V_M \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) I_M \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi\right) = \\ &= VI \left[ \cos \varphi - \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right) \right] = VI \cos \varphi - VI \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right) \\ p_3 &= v_3 i_3 = V_M \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) I_M \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right) = \\ &= VI \left[ \cos \varphi - \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{8}{3}\pi\right) \right] = VI \cos \varphi - VI \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{8}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

notare che  $\left[\frac{8}{3}\pi = \left(2\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{2}{3}\pi\right]$

Sommando quindi membro a membro le precedenti equazioni, otteniamo la **potenza istantanea per il sistema trifase simmetrico ed equilibrato**:

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 = VI \cos \varphi - VI \cos(2\omega t - \varphi) + \\ &VI \cos \varphi - VI \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right) + \\ &VI \cos \varphi - VI \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{8}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

Essendo le tre potenze fluttuanti tre sinusoidi di uguale ampiezza e sfasate tra loro di  $120^\circ$ , si ha che la loro somma è uguale a zero, di conseguenza:

$$p = 3VI \cos \varphi$$

Ricordando che V e I sono i valori efficaci delle grandezze di fase (collegamento stella-stella), possiamo scrivere:

$$p = 3V_f I_f \cos \varphi$$

Per questo possiamo affermare che in un sistema trifase simmetrico ed equilibrato la potenza istantanea è costante ed è uguale al triplo del prodotto dei valori efficaci della tensione di fase  $V_f$  e della corrente di fase  $I_f$ , moltiplicato per il coseno dell'angolo di fase  $\varphi$  tra  $\dot{V}_f$  e  $\dot{I}_f$  (angolo caratteristico delle impedenze del carico).

Questo vuol dire anche che la potenza fluttuante complessiva è nulla (attenzione che la potenza fluttuante in ogni fase non è nulla), quindi rilevare che in un sistema trifase la potenza fluttuante complessiva è nulla garantisce che il sistema sia simmetrico ed equilibrato.

Rammentando ora che la potenza attiva è definita come il valor medio della potenza istantanea, possiamo affermare che la potenza attiva trifase è:

$$P = 3V_f I_f \cos \varphi$$

che, ovviamente, coincide con la somma delle potenze attive messe in gioco da ciascuna fase.

Analogamente la potenza reattiva trifase è la somma delle potenze reattive messe in gioco da ciascuna fase, per cui:

$$Q = 3V_f I_f \sin \varphi$$

Occorre puntualizzare che nei sistemi trifase, la potenza reattiva perde il significato fisico di ampiezza della potenza reattiva istantanea ed assume solo un significato puramente matematico.

Usualmente, però, la potenza di un sistema trifase viene espressa in termini di grandezze di linea e quindi, tenendo presente che:

nel collegamento a stella	$I_l = I_f$	$V_l = \sqrt{3}V_f$
nel collegamento a triangolo	$I_l = \sqrt{3}I_f$	$V_l = V_f$

si ottiene:

collegamento a stella

collegamento a triangolo

$$P = 3V_f I_f \cos \varphi = 3 \frac{V_l}{\sqrt{3}} I_l \cos \varphi = \sqrt{3} V_l I_l \cos \varphi$$

$$Q = 3V_f I_f \sin \varphi = 3 \frac{V_l}{\sqrt{3}} I_l \sin \varphi = \sqrt{3} V_l I_l \sin \varphi$$

$$P = 3V_f I_f \cos \varphi = 3V_l \frac{I_l}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3} V_l I_l \cos \varphi$$

$$Q = 3V_f I_f \sin \varphi = 3V_l \frac{I_l}{\sqrt{3}} \sin \varphi = \sqrt{3} V_l I_l \sin \varphi$$

In definitiva definiamo **potenza attiva trifase**

$$P = \sqrt{3} V_l I_l \cos \varphi$$

e **potenza reattiva trifase**

$$Q = \sqrt{3} V_l I_l \sin \varphi$$

E' importante evidenziare che le due formule precedenti sono formule "ibride" poiché contengono sia grandezza di linea ( $V_l, I_l$ ), sia grandezze di fase ( $\varphi$ ); infatti  $\varphi$  è lo sfasamento tra il vettore tensione di fase ed il vettore corrente di fase.

Definiamo poi **potenza apparente trifase**:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3} V_l I_l$$

Inoltre, utilizzando il teorema di Boucherot, definiamo **potenza complessa di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato**:

$$\bar{S} = 3\dot{V}_f x \check{I}_f = S e^{j\varphi}$$

Il **fattore di potenza**, definito come rapporto tra potenza attiva e potenza apparente, nel sistema trifase simmetrico ed equilibrato sarà:

$$f. d. p. = \frac{P}{S} = \frac{\sqrt{3} V_l I_l \cos \varphi}{\sqrt{3} V_l I_l} = \cos \varphi$$

Possiamo quindi affermare che nei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati il fattore di potenza coincide, come per i sistemi monofase, con il coseno dell'angolo caratteristico delle impedenze del carico.

Comunque è bene fin d'ora definire il fattore di potenza di un sistema trifase come il coseno dell'angolo di cui va ruotata la stella dei vettori delle correnti, rispetto a quella delle tensioni, affinché l'espressione della potenza attiva del sistema assuma il massimo valore possibile.

## 2.2 Campo magnetico rotante di Galileo Ferraris

Galileo Ferraris scoprì e dimostrò un'importante proprietà dei sistemi trifase e cioè che questi sistemi *possono generare dei campi magnetici rotanti mediante sistemi trifase di correnti che percorrono avvolgimenti fissi nello spazio.*

Immaginiamo di disporre tre bobine identiche, cioè di uguale materiale, uguale lunghezza ed ugual numero di spire  $N$ , in una posizione fissa nello spazio, nella quale i loro assi siano complanari e formino tra di loro angoli di  $120^\circ$  l'uno rispetto all'altro (figura 13) e supponiamo di alimentarle con una terna simmetrica di tensioni. Essendo quindi le bobine un carico equilibrato, le stesse saranno percorse da una terna equilibrata di correnti.

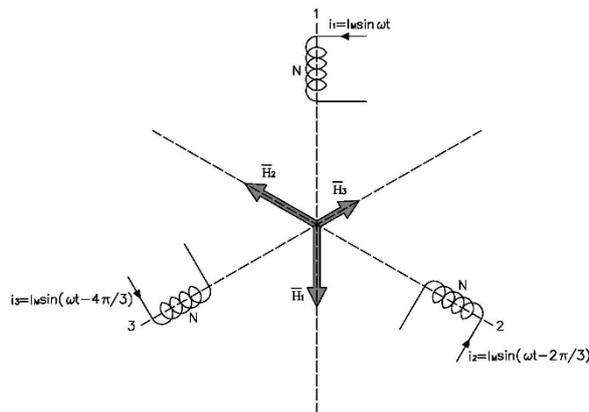


Figura 13

Se il mezzo è isotropo e la sua permeabilità magnetica è costante, le bobine generano tre campi magnetici che, nella zona centrale di esse, hanno una direzione coincidente con quella dell'asse delle rispettive bobine ed una **intensità variabile nel tempo** con la medesima legge sinusoidale delle correnti che li producono:

$$\begin{aligned} H_1(t) &= H_M \sin \omega t \\ H_2(t) &= H_M \sin \left( \omega t - \frac{2}{3} \pi \right) \\ H_3(t) &= H_M \sin \left( \omega t - \frac{4}{3} \pi \right) \end{aligned}$$

Il campo risultante  $\vec{H}_{ris}(t)$  è ovviamente, istante per istante, la somma geometrica dei tre vettori  $\vec{H}_1(t)$ ,  $\vec{H}_2(t)$ ,  $\vec{H}_3(t)$ :

$$\vec{H}_{ris}(t) = \vec{H}_1(t) + \vec{H}_2(t) + \vec{H}_3(t)$$

Riferendoci al piano di Gauss coincidente con il piano degli assi delle bobine (figura 14) abbiamo:

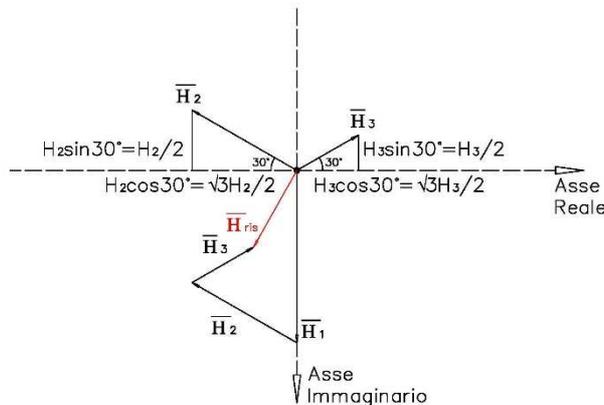


Figura 14

$$\vec{H}_1(t) = -jH_1(t) = -jH_M \sin \omega t$$

$$\vec{H}_2(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}H_2(t) + j\frac{1}{2}H_2(t)$$

$$\vec{H}_3(t) = +\frac{\sqrt{3}}{2}H_3(t) + j\frac{1}{2}H_3(t)$$

$$\vec{H}_{ris}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}[H_3(t) - H_2(t)] + j\left[\frac{H_3(t) + H_2(t)}{2} - H_1(t)\right]$$

Ed essendo:

$$H_1(t) = H_M \sin \omega t$$

$$H_2(t) = H_M \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) = H_M \left[ \sin \omega t \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) - \cos \omega t \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) \right] = H_M \left( -\frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right)$$

$$H_3(t) = H_M \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) = H_M \left[ \sin \omega t \cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) - \cos \omega t \sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right) \right] = H_M \left( -\frac{1}{2} \sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right)$$

Avremo:

$$H_3(t) - H_2(t) = H_M \left( -\frac{1}{2} \sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) - H_M \left( -\frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) = \sqrt{3}H_M \cos \omega t$$

$$H_3(t) + H_2(t) = H_M \left( -\frac{1}{2} \sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) + H_M \left( -\frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) = -H_M \sin \omega t$$

Per cui:

$$\begin{aligned} \vec{H}_{ris}(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2}[H_3(t) - H_2(t)] + j\left[\frac{H_3(t) + H_2(t)}{2} - H_1(t)\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}H_M \cos \omega t + j\left(-\frac{1}{2}H_M \sin \omega t - H_M \sin \omega t\right) = \frac{3}{2}H_M \cos \omega t - j\frac{3}{2}H_M \sin \omega t = \frac{3}{2}H_M e^{-j\omega t} \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo ottenuto che il campo risultante  $\vec{H}_{ris}(t)$  ha un'intensità costante nel tempo pari ad una volta e mezzo il campo massimo  $H_M$  prodotto da ciascuna bobina ed una direzione che ruota nello spazio, rispetto al sistema che lo genera, a velocità costante  $\omega$ , pari alla pulsazione delle correnti; quindi questo campo compie un giro completo ogni ciclo della corrente. Il senso di rotazione del campo è concorde al senso ciclico delle correnti che lo generano.

Allo stesso Galileo Ferraris è dovuto il principio dell'equivalenza fra un campo alternativo ed un complesso di due campi rotanti in senso opposto l'uno con l'altro.

Consideriamo un campo alternativo avente direzione fissa nello spazio (figura 15) ed una **intensità variabile nel tempo con legge sinusoidale**:

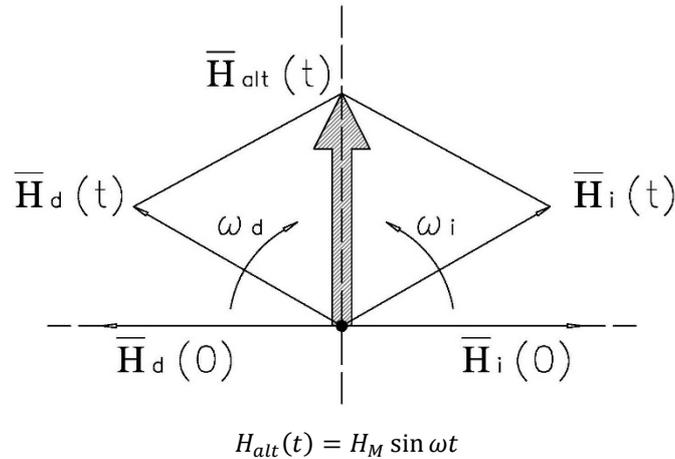


Figura 15

Consideriamo poi due campi magnetici di **intensità costante nel tempo**, pari ad  $\frac{1}{2}H_M$ , e direzione rotante nello spazio a velocità angolare costante, uguale alla pulsazione  $\omega$ ; i sensi di rotazione dei due campi siano fra loro opposti e chiamiamo *componente diretto*  $\vec{H}_d(t)$  il campo che ruota in senso orario e *componente inverso*  $\vec{H}_i(t)$  quello che ruota in senso opposto.

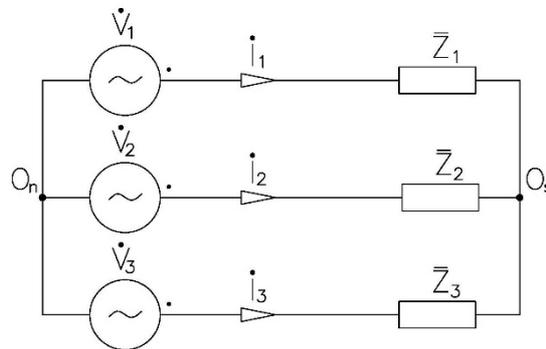
Se  $\vec{H}_d(t)$  ed  $\vec{H}_i(t)$  all'istante zero hanno direzione perpendicolare alla direzione di  $H_{alt}$  e senso l'uno opposto all'altro, è chiaro che ad ogni istante la loro posizione è sempre simmetrica rispetto alla direzione del campo alternativo e, quindi, la loro risultante ha sempre la stessa direzione di tale campo ed una intensità identicamente uguale all'intensità di esso:

$$\vec{H}_{ris}(t) = \vec{H}_d + \vec{H}_i = 2 \frac{\vec{H}_M}{2} \sin \omega t = \vec{H}_{alt}(t)$$

Possiamo quindi concludere che *un campo alternativo è equivalente a due campi rotanti in senso opposto, con velocità angolare uguale alla pulsazione del campo alternativo ed aventi una intensità costante uguale alla metà del valore massimo del campo alternativo stesso.*

### 3 Sistemi dissimmetrici e squilibrati

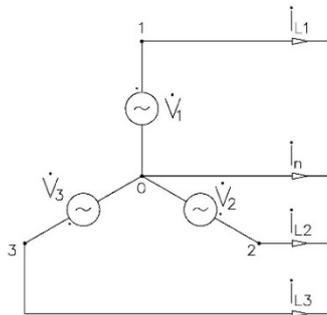
Un sistema trifase dissimmetrico e squilibrato è un sistema che tramite tre tensioni che hanno in comune solo la frequenza alimenta un carico costituito da tre impedenze diverse tra loro (figura 16).



$$\begin{aligned} v_1 &= V_{M1} \sin(\omega t + \psi_1 + \varphi_1) \\ v_2 &= V_{M2} \sin(\omega t + \psi_2 + \varphi_2) \\ v_3 &= V_{M3} \sin(\omega t + \psi_3 + \varphi_3) \end{aligned}$$

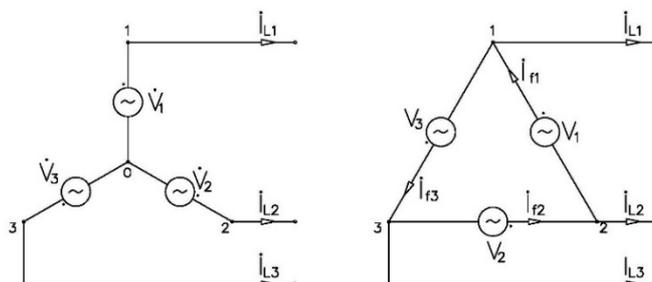
Figura 16

Molte reti di distribuzione in BT hanno una configurazione formata da un sistema generatore connesso a stella (figura 17a), il quale alimenta i vari carichi mediante una linea di collegamento costituita da quattro conduttori, tre partono dai morsetti delle fasi ed il quarto dal centro stella (morsetto del neutro). Questa configurazione caratterizza il sistema che chiameremo *sistema trifase a quattro fili*.



$$\dot{I}_{L1} + \dot{I}_{L2} + \dot{I}_{L3} + \dot{I}_n = 0$$

a) Sistema a quattro fili



$$\dot{I}_{L1} + \dot{I}_{L2} + \dot{I}_{L3} = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{L1} + \dot{I}_{L2} + \dot{I}_{L3} &= \\ &= (\dot{I}_{f1} - \dot{I}_{f3}) + (\dot{I}_{f2} - \dot{I}_{f1}) + (\dot{I}_{f3} - \dot{I}_{f2}) = 0 \end{aligned}$$

b) Sistema a tre fili

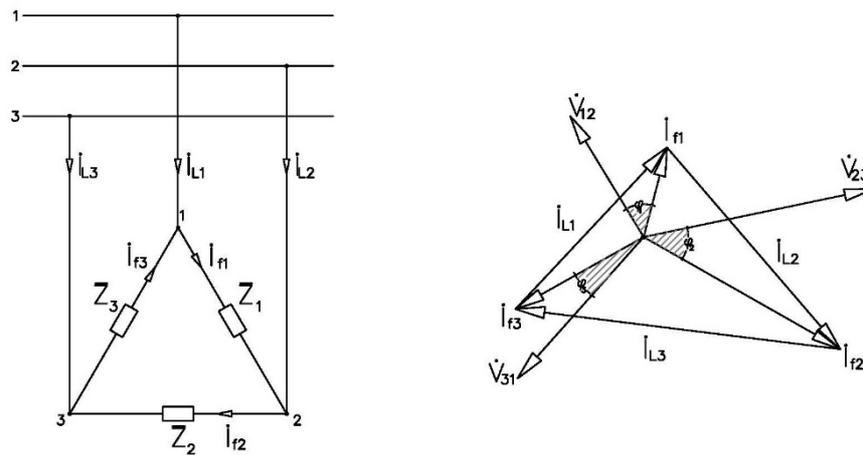
Figura 17

A differenza delle reti di distribuzione prima citate, le grandi condutture trifase per il trasporto dell'energia sono usualmente costituite dai soli conduttori che hanno origine dai tre morsetti delle fasi. La loro configurazione, quindi, è quella di un sistema con generatore connesso a triangolo, oppure a stella, ma il morsetto del neutro non ha collegamento con le utenze (figura 17b). Il sistema avente tale configurazione è detto *sistema trifase a tre fili*.

Nei sistemi a tre fili, come si rileva dalla figura, la somma delle correnti di linea è sempre nulla; e poiché abbiamo già visto che anche la somma delle tre tensioni di linea è in ogni caso identicamente uguale a zero, concludiamo che *nei sistemi trifase dissimmetrici e squilibrati a tre fili, le terne delle grandezze di linea sono sempre pure*.

### 3.1 Tensioni e correnti nei sistemi trifase a tre fili

Nei sistemi trifase dissimmetrici e squilibrati, il tipo di carico per il quale il calcolo delle grandezze si esegue con maggiore facilità, è quello con le fasi del carico connesse a triangolo (figura 18).



$$\begin{aligned} \dot{I}_{l1} + \dot{I}_{l2} + \dot{I}_{l3} &= 0 \\ \dot{V}_{12} + \dot{V}_{23} + \dot{V}_{31} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{f1} &= \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} \\ \dot{I}_{f2} &= \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} \\ \dot{I}_{f3} &= \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{l1} &= \dot{I}_{f1} - \dot{I}_{f3} = \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} - \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} \\ \dot{I}_{l2} &= \dot{I}_{f2} - \dot{I}_{f1} = \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} - \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} \\ \dot{I}_{l3} &= \dot{I}_{f3} - \dot{I}_{f2} = \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} - \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} \end{aligned}$$

Figura 18

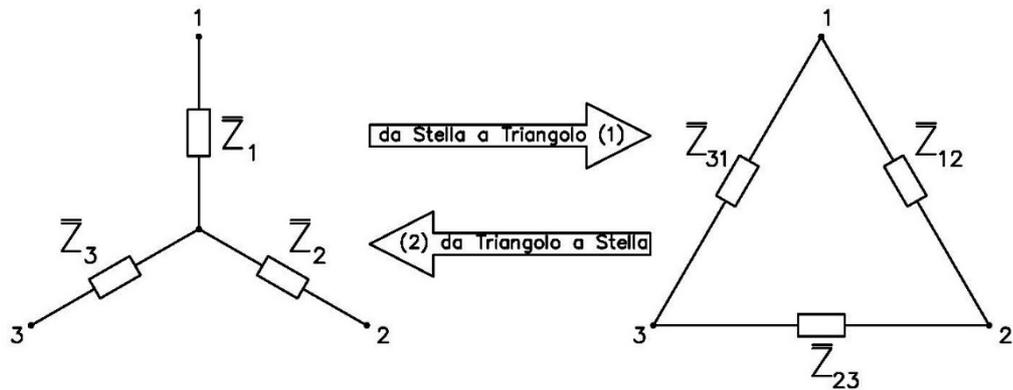
Infatti, note le tensioni concatenate della linea  $\dot{V}_{12}, \dot{V}_{23}, \dot{V}_{31}$ , si calcolano immediatamente le correnti nelle fasi del carico.

$$\begin{aligned} \dot{I}_{f1} &= \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} = \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} e^{-j\varphi_1} \\ \dot{I}_{f2} &= \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} = \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} e^{-j\varphi_2} \\ \dot{I}_{f3} &= \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} = \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} e^{-j\varphi_3} \end{aligned}$$

dove  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sono gli angoli caratteristici delle impedenze del carico. Sottraendo poi a due a due queste correnti, si ottengono le correnti di linea:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{l1} &= \dot{I}_{f1} - \dot{I}_{f3} = \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} - \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} \\ \dot{I}_{l2} &= \dot{I}_{f2} - \dot{I}_{f1} = \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} - \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_1} \\ \dot{I}_{l3} &= \dot{I}_{f3} - \dot{I}_{f2} = \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_3} - \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_2} \end{aligned}$$

Se invece il carico è connesso a stella, il calcolo oltre che con i metodi classici (per esempio Millmann e Kirchhoff) si può ricondurre al caso precedente sostituendo alla stella del carico, il triangolo equivalente tramite le note formule (figura 19).



$$\bar{Z}_{12} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_p}$$

$$\bar{Z}_{23} = \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_p}$$

$$\bar{Z}_{31} = \frac{\bar{Z}_3 \bar{Z}_1}{\bar{Z}_p}$$

$$\bar{Z}_p = \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}} \quad (1)$$

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_{12} \bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_s}$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_{12} \bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_s}$$

$$\bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_{23} \bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_s}$$

$$\bar{Z}_s = \bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31} \quad (2)$$

Figura 19

Fatta quindi l'equivalenza stella triangolo, si calcolano le correnti di fase del triangolo:

$$\dot{I}_{12} = \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_{12}}$$

$$\dot{I}_{23} = \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_{23}}$$

$$\dot{I}_{31} = \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_{31}}$$

E facendo la differenza a due a due fra queste correnti, si ricavano le correnti di linea che, poi, altro non sono che le correnti di fase dell'originario carico a stella:

$$\dot{I}_{l1} = \dot{I}_{f1} = \dot{I}_{12} - \dot{I}_{31} = \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_{12}} - \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_{31}}$$

$$\dot{I}_{l2} = \dot{I}_{f2} = \dot{I}_{23} - \dot{I}_{12} = \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_{23}} - \frac{\dot{V}_{12}}{\bar{Z}_{12}}$$

$$\dot{I}_{l3} = \dot{I}_{f3} = \dot{I}_{31} - \dot{I}_{23} = \frac{\dot{V}_{31}}{\bar{Z}_{31}} - \frac{\dot{V}_{23}}{\bar{Z}_{23}}$$

### 3.2 I centri stella nei sistemi trifase dissimmetrici e squilibrati

Data una linea trifase ed il relativo sistema di tensioni concatenate  $\dot{V}_{12}, \dot{V}_{23}, \dot{V}_{31}$ , chiameremo genericamente centro stella  $O_s$ , il punto di connessione di una qualunque stella di tre impedenze  $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$ , scelte arbitrariamente e collegate ai conduttori di linea (figura 20).

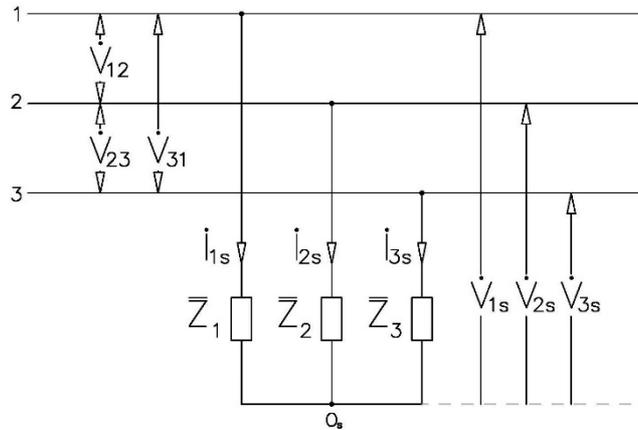


Figura 20

E' chiaro che per un determinato sistema trifase di tensioni concatenate possono costruirsi infiniti centri stella variando ad arbitrio le impedenze della stella. Quando le tre impedenze  $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$  e  $\bar{Z}_3$  sono uguali fra loro, il relativo centro stella, come già visto, si dice **baricentro elettrico** ( $O_b$ ) del sistema trifase.

Chiameremo poi **terna di tensioni stellate** ( $\dot{V}_{1s}, \dot{V}_{2s}, \dot{V}_{3s}$ ), rispetto ad un determinato centro stella ( $O_s$ ), le tensioni fra ciascun conduttore di linea ed  $O_s$ . Quando il centro stella prescelto è il baricentro del sistema, le tensioni stellate, come già detto, si dicono **baricentriche** ( $\dot{V}_{1b}, \dot{V}_{2b}, \dot{V}_{3b}$ ).

È facile rilevare che ogni tensione di linea o concatenata, risulta uguale alla differenza fra due successive tensioni stellate di ogni terna. Pertanto, qualunque sia il centro stella prescelto, le tensioni stellate sono legate alle tensioni concatenate dalle relazioni:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{12} &= \dot{V}_{1s} - \dot{V}_{2s} \\ \dot{V}_{23} &= \dot{V}_{2s} - \dot{V}_{3s} \\ \dot{V}_{31} &= \dot{V}_{3s} - \dot{V}_{1s}\end{aligned}$$

Tutte le terne di tensioni stellate derivate da una stessa linea, se questa è *prevalente*, hanno in comune fra loro la stessa terna di tensioni concatenate  $\dot{V}_{12}, \dot{V}_{23}, \dot{V}_{31}$ . Perciò le differenze omologhe fra due consecutive tensioni stellate, essendo uguali alla stessa tensione di linea, sono uguali in tutte le terne:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{12} &= \dot{V}_{1s'} - \dot{V}_{2s'} = \dot{V}_{1s''} - \dot{V}_{2s''} = \dots \\ \dot{V}_{23} &= \dot{V}_{2s'} - \dot{V}_{3s'} = \dot{V}_{2s''} - \dot{V}_{3s''} = \dots \\ \dot{V}_{31} &= \dot{V}_{3s'} - \dot{V}_{1s'} = \dot{V}_{3s''} - \dot{V}_{1s''} = \dots\end{aligned}$$

Quindi se nella rappresentazione polare delle tensioni (figura 21) si disegna innanzitutto il triangolo delle tre tensioni di linea ( $\dot{V}_{12}, \dot{V}_{23}, \dot{V}_{31}$ ) e si riportano poi nel diagramma i vettori delle varie terne stellate con l'origine in altrettanti diversi poli, in modo che gli estremi dei vettori  $\dot{V}_{1s}, \dot{V}_{2s}$  e  $\dot{V}_{3s}$  coincidano in ogni caso con i corrispondenti vertici del triangolo disegnato, tutte le terne di tensioni stellate derivate dalla linea risultano rappresentate da **stelle di vettori a vertici comuni**.

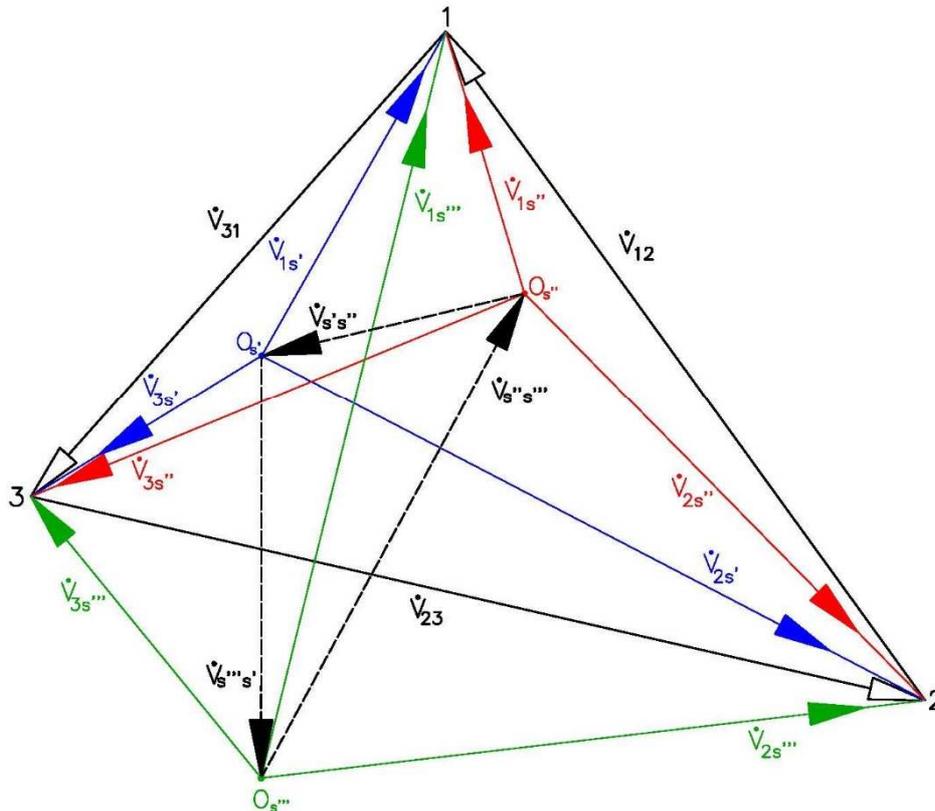


Figura 21

È chiaro allora che i poli delle varie terne corrispondono ai relativi centri stella e che la tensione fra due qualsiasi centri stella del sistema è rappresentata dal vettore congiungente i due poli corrispondenti.

Tra le infinite terne di tensioni stellate relative ad un determinato sistema trifase, si distingue, per alcune importanti proprietà caratteristiche, la terna delle tensioni baricentriche.

Consideriamo il baricentro  $O_b$  ottenuto derivando dalla linea tre impedenze uguali  $\bar{Z}$  (figura 22). Indicando con  $\dot{I}_{1b}, \dot{I}_{2b}, \dot{I}_{3b}$ , le correnti che percorrono tali impedenze (la loro somma per l'equazione al nodo  $O_b$  è nulla), si ha:

$$\dot{V}_{1b} + \dot{V}_{2b} + \dot{V}_{3b} = \bar{Z}(\dot{I}_{1b} + \dot{I}_{2b} + \dot{I}_{3b}) = 0$$

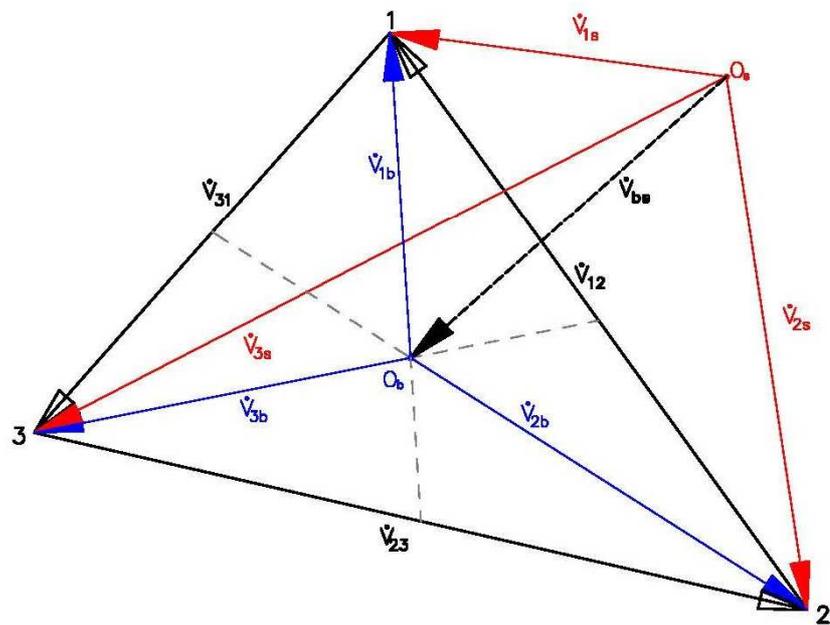
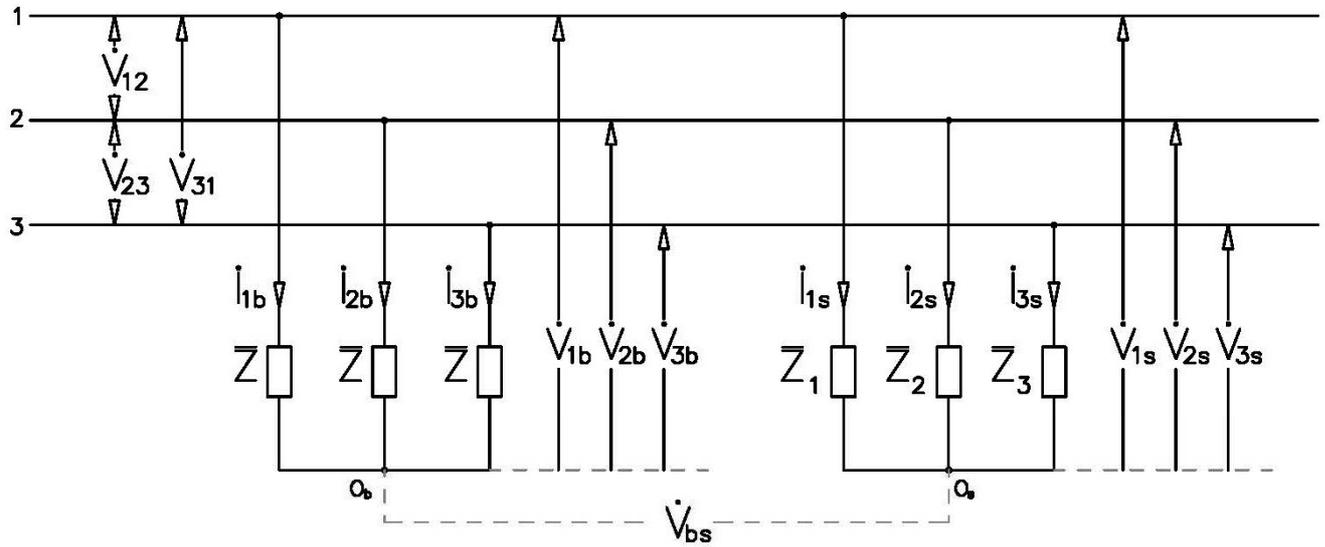


Figura 22

Vale a dire che la *terna delle tensioni baricentriche è sempre pura*. È evidente inoltre che il punto  $O_b$  coincide con il baricentro geometrico del triangolo i cui lati rappresentano le tensioni di linea.

La differenza di potenziale esistente tra il baricentro  $O_b$  del sistema ed un qualunque centro stella  $O_s$  è rappresentata nel diagramma polare della figura 22 dal vettore  $\dot{V}_{bs}$  che unisce  $O_s$  con  $O_b$ . L'espressione simbolica si deduce dalle relazioni:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{bs} + \dot{V}_{1b} &= \dot{V}_{1s} \\ \dot{V}_{bs} + \dot{V}_{2b} &= \dot{V}_{2s} \\ \dot{V}_{bs} + \dot{V}_{3b} &= \dot{V}_{3s}\end{aligned}$$

Infatti, sommandole membro a membro e ricordando che la terna baricentrica è pura, si ottiene:

$$\dot{V}_{bs} = \frac{\dot{V}_{1s} + \dot{V}_{2s} + \dot{V}_{3s}}{3}$$

Vale a dire, la tensione  $\dot{V}_{bs}$  fra il baricentro del sistema ed un centro stella generico  $O_s$  è espressa, in termini simbolici, dalla media aritmetica delle tre tensioni stellate rispetto ad  $O_s$ .

Questa tensione può, evidentemente, essere espressa anche in funzione delle tensioni baricentriche e delle ammettenze  $\bar{Y}_1$ ,  $\bar{Y}_2$  e  $\bar{Y}_3$  del carico, infatti scrivendo l'equazione al nodo  $O_s$  (figura 23):

$$\dot{I}_{1s} + \dot{I}_{2s} + \dot{I}_{3s} = 0$$

Essendo:

$$\begin{aligned}\dot{I}_{1s} &= \dot{V}_{1s} \bar{Y}_1 \\ \dot{I}_{2s} &= \dot{V}_{2s} \bar{Y}_2 \\ \dot{I}_{3s} &= \dot{V}_{3s} \bar{Y}_3\end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\dot{V}_{1s} \bar{Y}_1 + \dot{V}_{2s} \bar{Y}_2 + \dot{V}_{3s} \bar{Y}_3 &= 0 \\ (\dot{V}_{bs} + \dot{V}_{1b}) \bar{Y}_1 + (\dot{V}_{bs} + \dot{V}_{2b}) \bar{Y}_2 + (\dot{V}_{bs} + \dot{V}_{3b}) \bar{Y}_3 &= 0 \\ \dot{V}_{1b} \bar{Y}_1 + \dot{V}_{2b} \bar{Y}_2 + \dot{V}_{3b} \bar{Y}_3 + \dot{V}_{bs} (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3) &= 0 \\ \dot{V}_{bs} &= - \frac{\dot{V}_{1b} \bar{Y}_1 + \dot{V}_{2b} \bar{Y}_2 + \dot{V}_{3b} \bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3} \\ \dot{V}_{sb} &= \frac{\dot{V}_{1b} \bar{Y}_1 + \dot{V}_{2b} \bar{Y}_2 + \dot{V}_{3b} \bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3}\end{aligned}$$

La formula:

$$\dot{V}_{bs} = \frac{\dot{V}_{1s} + \dot{V}_{2s} + \dot{V}_{3s}}{3}$$

consente di stabilire delle semplici relazioni tramite le quali si possono esprimere le *tensioni stellate baricentriche in funzione delle tensioni di linea*. Supponiamo, essendo il centro stella  $O_s$  arbitrario, di far coincidere  $O_s$  con il vertice 1 del triangolo di figura 22. Le tensioni stellate rispetto a tale centro stella saranno:

$$\dot{V}_{1s}^{(1)} = 0$$

$$\dot{V}_{2s}^{(1)} = -\dot{V}_{12}$$

$$\dot{V}_{3s}^{(1)} = \dot{V}_{31}$$

sostituendo otteniamo

$$\dot{V}_{bs}^{(1)} = \frac{\dot{V}_{1s}^{(1)} + \dot{V}_{2s}^{(1)} + \dot{V}_{3s}^{(1)}}{3} = \frac{-\dot{V}_{12} + \dot{V}_{31}}{3}$$

e poiché  $\dot{V}_{bs}^{(1)}$  non è altro che l'opposto della tensione stellata baricentrica  $\dot{V}_{1b}$ , si ha:

$$\dot{V}_{bs}^{(1)} = \frac{-\dot{V}_{12} + \dot{V}_{31}}{3} = -\dot{V}_{1b}$$

ed infine

$$\dot{V}_{1b} = \frac{\dot{V}_{12} - \dot{V}_{31}}{3}$$

Banalmente, con analogo procedimento, è cioè facendo coincidere  $O_s$  con i vertici 2 e 3 del triangolo delle tensioni di linea, otteniamo:

$$\dot{V}_{2b} = \frac{\dot{V}_{23} - \dot{V}_{12}}{3}$$

$$\dot{V}_{3b} = \frac{\dot{V}_{31} - \dot{V}_{23}}{3}$$

### 3.3 Potenza nei sistemi dissimmetrici e squilibrati

Dato un sistema trifase dissimmetrico e squilibrato, a tre o quattro fili, l'andamento degli scambi energetici, può rilevarsi dall'esame della variazione nel tempo delle potenze istantanee,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , erogate dai tre generatori (o assorbite dalle tre fasi del carico). La **potenza trifase istantanea** che il sistema trasmette alla linea (o che il carico assorbe dalla linea), è data dalla somma delle tre potenze istantanee.

Date quindi le correnti e le tensioni relative alle singole fasi:

$$\begin{aligned} v_1 &= V_{M1} \sin(\omega t + \psi_1 + \varphi_1) & i_1 &= I_{M1} \sin(\omega t + \psi_1) \\ v_2 &= V_{M2} \sin(\omega t + \psi_2 + \varphi_2) & i_2 &= I_{M2} \sin(\omega t + \psi_2) \\ v_3 &= V_{M3} \sin(\omega t + \psi_3 + \varphi_3) & i_3 &= I_{M3} \sin(\omega t + \psi_3) \end{aligned}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 = \\ &= V_1 I_1 \cos \varphi_1 - V_1 I_1 \cos(2\omega t + 2\psi_1 + \varphi_1) + \\ &+ V_2 I_2 \cos \varphi_2 - V_2 I_2 \cos(2\omega t + 2\psi_2 + \varphi_2) + \\ &+ V_3 I_3 \cos \varphi_3 - V_3 I_3 \cos(2\omega t + 2\psi_3 + \varphi_3) \end{aligned}$$

La potenza istantanea è quindi, come ben noto, costituita da due addendi, il primo costante (**Potenza Costante**):

$$p_c = V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2 + V_3 I_3 \cos \varphi_3$$

ed il secondo variabile (**Potenza Fluttuante**):

$$\begin{aligned} p_{fl} &= -[V_1 I_1 \cos(2\omega t + 2\psi_1 + \varphi_1) + V_2 I_2 \cos(2\omega t + 2\psi_2 + \varphi_2) + V_3 I_3 \cos(2\omega t + 2\psi_3 + \varphi_3)] = \\ &= V_1 I_1 \sin\left(2\omega t + 2\psi_1 + \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \\ &+ V_2 I_2 \sin\left(2\omega t + 2\psi_2 + \varphi_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \\ &+ V_3 I_3 \sin\left(2\omega t + 2\psi_3 + \varphi_3 - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

La potenza fluttuante è quindi costituita dalla somma delle potenze fluttuanti messe in gioco da ciascuna fase.

Diversamente da quanto avviene nei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati, dove abbiamo visto che la potenza fluttuante trifase è nulla, in questi sistemi la stessa è presente e costituisce un peculiare carattere distintivo del regime dissimmetrico e squilibrato.

Generalizzando ora le definizioni già note, diremo **Potenza Attiva Trifase P** e **Potenza Reattiva Trifase Q** di un sistema dissimmetrico e squilibrato la somma delle potenze attive e delle potenze reattive delle tre fasi:

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + P_3 = V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2 + V_3 I_3 \cos \varphi_3 \\ Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = V_1 I_1 \sin \varphi_1 + V_2 I_2 \sin \varphi_2 + V_3 I_3 \sin \varphi_3 \end{aligned}$$

La potenza attiva trifase, come noto, è sempre il valor medio della potenza istantanea, mentre in questi sistemi la potenza reattiva trifase non ha alcun significato fisico.

Definiamo poi, come per gli altri sistemi, **Potenza Apparente Trifase S** e **Potenza Complessa Trifase  $\bar{S}$** , rispettivamente:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = \dot{V}_1 \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_2 \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_3 \cdot \dot{I}_3 = V_1 I_1 e^{j\varphi_1} + V_2 I_2 e^{j\varphi_2} + V_3 I_3 e^{j\varphi_3} = P_1 + jQ_1 + P_2 + jQ_2 + P_3 + jQ_3$$

Nei sistemi trifase dissimmetrici e squilibrati non è più possibile definire il fattore di potenza in funzione degli angoli caratteristici del carico. Utilizzando quindi la definizione generale, abbiamo:

$$f.d.p. = \frac{P}{S}$$

Se vogliamo comunque utilizzare, per comodità, un coseno, possiamo affermare che *il fattore di potenza coincide con il coseno dell'angolo di cui va ruotata la stella delle correnti rispetto a quella delle tensioni o viceversa affinché l'espressione della potenza attiva risulti massima.*

### 3.4 Teorema di Aron

Consideriamo un sistema a *tre fili* dissimmetrico e squilibrato e costruiamo un qualsiasi centro stella  $O_s$  (figura 23);

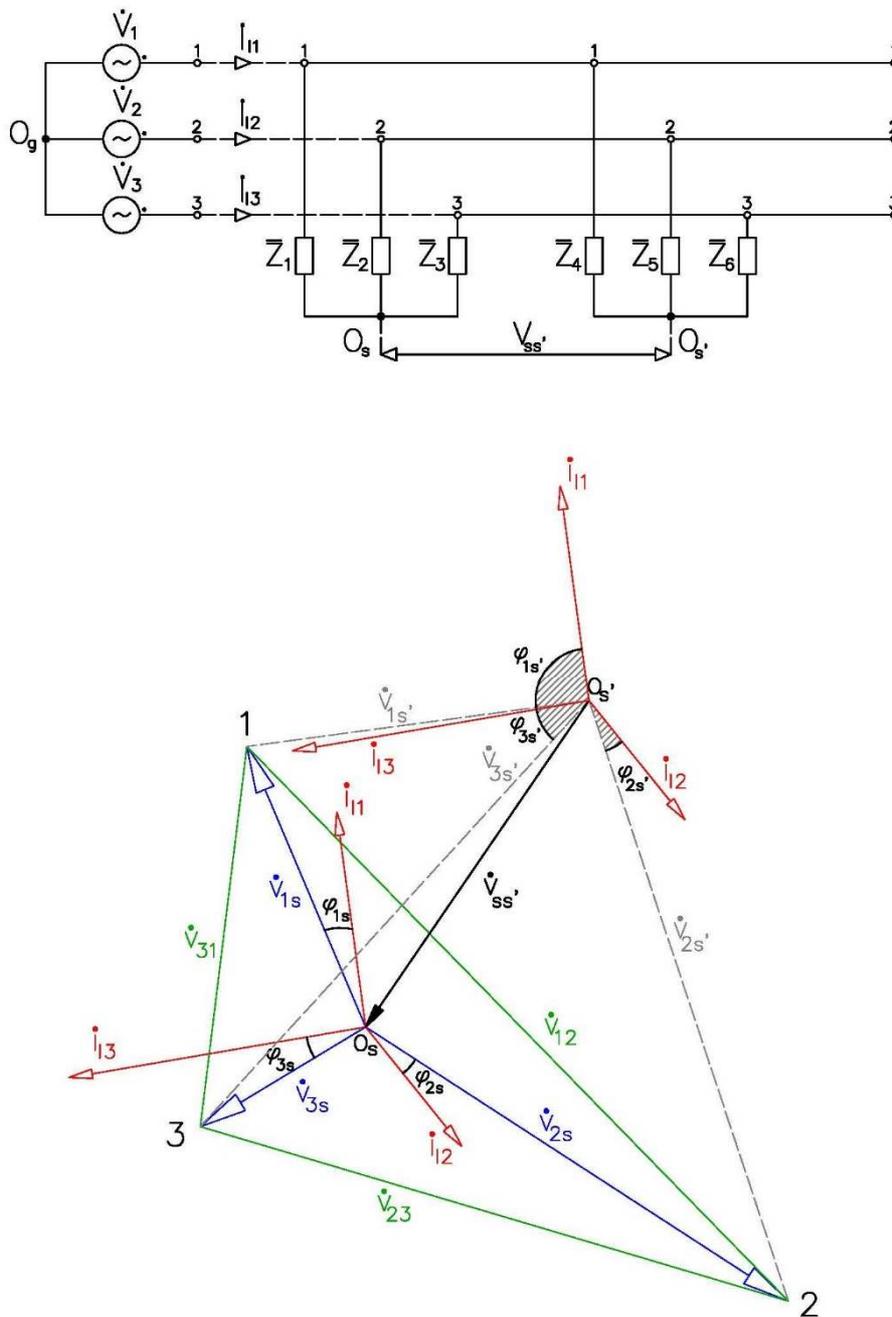


Figura 23 – Teorema di Aron

Si rileva che l'espressione (potenza attiva, rispetto ad  $O_s$ ):

$$P(O_s) = V_{1s}I_{l1} \cos \varphi_{1s} + V_{2s}I_{l2} \cos \varphi_{2s} + V_{3s}I_{l3} \cos \varphi_{3s} = \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{l3}$$

è invariante rispetto al centro stella, non varia cioè di valore qualsiasi sia il centro stella scelto.

Supponiamo di costruire ora un altro centro stella qualsiasi  $O_{s'}$  ed indichiamo con  $\dot{V}_{ss'}$  la tensione tra i due centri stella, avremo:

$$\begin{aligned} P(O_{s'}) &= \dot{V}_{1s'} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s'} \cdot \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s'} \cdot \dot{I}_{l3} = (\dot{V}_{ss'} + \dot{V}_{1s}) \cdot \dot{I}_{l1} + (\dot{V}_{ss'} + \dot{V}_{2s}) \cdot \dot{I}_{l2} + (\dot{V}_{ss'} + \dot{V}_{3s}) \cdot \dot{I}_{l3} \\ &= \dot{V}_{ss'} \cdot (\dot{I}_{l1} + \dot{I}_{l2} + \dot{I}_{l3}) + \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{l3} \end{aligned}$$

Ed essendo la terna delle correnti una terna pura, cioè la somma delle correnti è zero, si ha:

$$P(O_{s'}) = \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{l3} = P(O_s)$$

**L'invarianza vale anche, ovviamente, per i centri stella  $O_g$  od  $O_c$  dei generatori o del carico (se connessi a stella);** perciò indicando con  $P$  la potenza attiva trifase del sistema, si ha:

$$P(O_{s'}) = \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{l3} = P$$

Quindi possiamo terminare affermando che *la potenza attiva trifase di un sistema trifase a tre fili qualsiasi è uguale alla somma dei prodotti scalari delle correnti di linea per le corrispondenti tensioni stellate relative ad un qualunque centro stella scelto ad arbitrio (Teorema di Aron).*

Il teorema, dimostrato nel caso di generatori o carichi supposti a stella, è valido anche nel caso in cui siano connessi a triangolo. La potenza trifase, infatti, erogata dal generatore (o assorbita dal carico) a triangolo è uguale a quella erogata dal generatore (o assorbita dal carico) a stella ad esso equivalente. Consideriamo un generatore (o un carico) connesso a triangolo ed immaginiamo di sostituire ad esso il suo equivalente a stella, sapendo che:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1\Delta} &= \dot{V}_{1\lambda} - \dot{V}_{2\lambda} & \dot{I}_{1\lambda} &= \dot{I}_1 - \dot{I}_3 \\ \dot{V}_{2\Delta} &= \dot{V}_{2\lambda} - \dot{V}_{3\lambda} & \dot{I}_{2\lambda} &= \dot{I}_2 - \dot{I}_1 \\ \dot{V}_{3\Delta} &= \dot{V}_{3\lambda} - \dot{V}_{1\lambda} & \dot{I}_{3\lambda} &= \dot{I}_3 - \dot{I}_2 \end{aligned}$$

avremo:

$$\begin{aligned} P_{\Delta} &= \dot{V}_{1\Delta} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{2\Delta} \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{3\Delta} \cdot \dot{I}_3 = (\dot{V}_{1\lambda} - \dot{V}_{2\lambda}) \cdot \dot{I}_1 + (\dot{V}_{2\lambda} - \dot{V}_{3\lambda}) \cdot \dot{I}_2 + (\dot{V}_{3\lambda} - \dot{V}_{1\lambda}) \cdot \dot{I}_3 = \\ &= \dot{V}_{1\lambda} \cdot (\dot{I}_1 - \dot{I}_3) + \dot{V}_{2\lambda} \cdot (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) + \dot{V}_{3\lambda} \cdot (\dot{I}_3 - \dot{I}_2) = \dot{V}_{1\lambda} \cdot \dot{I}_{1\lambda} + \dot{V}_{2\lambda} \cdot \dot{I}_{2\lambda} + \dot{V}_{3\lambda} \cdot \dot{I}_{3\lambda} = P_{\lambda} \end{aligned}$$

Analogamente può dimostrarsi per la potenza reattiva trifase quando, al posto dei prodotti scalari, si sostituiscono i prodotti vettoriali. Pertanto qualunque sia il centro stella al quale è riferita la terna delle tensioni stellate, si ha:

$$Q = \dot{V}_{1s} \wedge \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \wedge \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s} \wedge \dot{I}_{l3}$$

Il teorema di Aron indica, quindi, come possono esprimersi le potenze di un sistema trifase dissimmetrico e squilibrato a tre fili, in funzione delle sole grandezze di linea, indipendentemente dal generatore e dal carico.

Riprendendo, infatti, l'espressione generale della potenza attiva trifase:

$$P = \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_{l2} + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{l3}$$

scrivendo l'equazione al nodo (centro stella) per il sistema a tre fili:

$$\dot{I}_{l1} + \dot{I}_{l2} + \dot{I}_{l3} = 0$$

e ricavando da quest'ultima, per esempio,  $\dot{I}_{l2} = -\dot{I}_{l1} - \dot{I}_{l3}$  e sostituendola, si ha:

$$\begin{aligned} P &= \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{2s} \cdot (-\dot{I}_{l1} - \dot{I}_{l3}) + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{l3} = (\dot{V}_{1s} - \dot{V}_{2s}) \cdot \dot{I}_{l1} - (\dot{V}_{2s} - \dot{V}_{3s}) \cdot \dot{I}_{l3} = \dot{V}_{12} \cdot \dot{I}_{l1} - \dot{V}_{23} \cdot \dot{I}_{l3} \\ &= \dot{V}_{12} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{32} \cdot \dot{I}_{l3} \end{aligned}$$

ed analogamente per la potenza reattiva trifase.

In conclusione:

$$P = \dot{V}_{12} \cdot \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{32} \cdot \dot{I}_{l3}$$

$$Q = \dot{V}_{12} \wedge \dot{I}_{l1} + \dot{V}_{32} \wedge \dot{I}_{l3}$$

## Sommario

Sistemi trifase .....	2
1 Generalità.....	2
1.1 Sistemi simmetrici di tensioni	3
1.2 Sistemi equilibrati di correnti	5
2 Sistemi simmetrici ed equilibrati .....	8
2.1 Potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati	12
2.2 Campo magnetico rotante di Galileo Ferraris	14
3 Sistemi dissimmetrici e squilibrati.....	17
3.1 Tensioni e correnti nei sistemi trifase a tre fili	18
3.2 I centri stella nei sistemi trifase dissimmetrici e squilibrati	20
Data una linea trifase ed il relativo sistema di tensioni concatenate $V_{12}, V_{23}, V_{31}$ , chiameremo genericamente centro stella	20
3.3 Potenza nei sistemi dissimmetrici e squilibrati	25
3.4 Teorema di Aron	26
4 Misura delle potenze nei sistemi trifase.....	29
4.1 Misure con wattmetri monofase	29
Inserzione aciclica	29
Inserzione ciclica	29
Inserzione in quadratura	30
Inserzione Aron	30
Inserzione Righi	30
Inserzione Barbangelata	30
Misure con wattmetri trifase	30
4.2 Misura delle potenze nei sistemi simmetrici ed equilibrati	31
4.2.1 Misura del fattore di potenza	36
4.3 Misura delle potenze nei sistemi a tre fili simmetrici e squilibrati	38
4.3.1 Misura di potenza attiva, inserzione Aron	38
4.3.2 Misura di potenza reattiva, inserzione Righi	39
4.3.3 Misura di potenza reattiva, inserzione Barbangelata	41
4.3.4 Misura del fattore di potenza	42
4.4 Misura delle potenze nei sistemi a quattro fili	43
4.4.1 Misura della potenza attiva	43
4.4.2 Misura della potenza reattiva, inserzione ciclica	44
4.5 Misura delle potenze nei sistemi dissimmetrici e squilibrati	45
4.6 Gli errori nelle misure di potenza attiva trifase	47
5 Rifasamento nei sistemi trifase .....	49
6 Convenienza dell'utilizzo dei sistemi trifase .....	52
7 Accoppiamenti mutui nei sistemi trifase.....	53
Caso generale	53
Caso particolare	60
8 Studio generale dei sistemi trifase .....	63
8.1 Rappresentazione matriciale delle grandezze trifase	63
8.1.1 Somma di terne di vettori:	64
8.1.2 Prodotto di una terna di vettori per un numero:	65
8.1.3 Prodotto di una terna di vettori per una terna di numeri:	66
8.1.4 Prodotto di una terna di vettori per una tripla terna di numeri:	67
8.1.5 Rappresentazione matriciale della legge di Ohm, dei principi di Kirchhoff e della potenza trifase	70
8.2 L'algebra delle sequenze	71
8.3 Scomposizione di un sistema trifase di grandezze	76
8.3.1 Proprietà delle componenti simmetriche	79
8.4 Analisi dei sistemi trifase mediante le componenti simmetriche	85

8.4.1	Relazione fra le componenti simmetriche	86
8.4.2	Impedenze di sequenza	87
8.4.3	Legge di Ohm mediante le componenti di sequenza	89
8.4.4	Principi di Kirchhoff mediante le componenti di sequenza	91
8.4.5	Circuito equivalente di sequenza	92
8.4.6	Sistemi fisicamente simmetrici	93
8.4.7	Potenze trifase mediante le componenti di sequenza	94
8.5	Analisi dei guasti con le reti di sequenza	96
8.5.1	Circuito equivalente di sequenza diretta	97
8.5.2	Circuito equivalente di sequenza inversa	97
8.5.3	Circuito equivalente di sequenza omopolare	98
8.5.4	Scomposizione di una rete trifase nella sezione di guasto	98
Sommaro.....		107