UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Parallelo fra stelle di impedenze

Anno Accademico 2016-2017

prof. ing. Bruno Azzerboni

Caso generale

Sia dato il sistema di figura 1, costituito da due stelle squilibrate di impedenze:

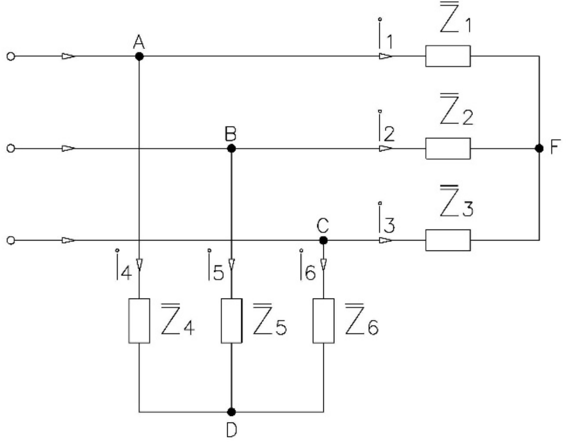

Fig. 1

queste saranno collegate in parallelo *se e solo se la tensione* $\dot{V}_{DF}$ fra i due centri stella risulta nulla. Indipendentemente dal sistema di alimentazione possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\dot{V}_{DF} &= -\bar{Z}_4\dot{I}_4 + \bar{Z}_1\dot{I}_1 \quad \textit{percorso DAF}\\ \dot{V}_{DF} &= -\bar{Z}_5\dot{I}_5 + \bar{Z}_2\dot{I}_2 \quad \textit{percorso DBF}\\ \dot{V}_{DF} &= -\bar{Z}_6\dot{I}_6 + \bar{Z}_3\dot{I}_3 \quad \textit{percorso DCF}\end{aligned}$$

e le equazioni ai nodi

$$\begin{aligned}\dot{I}_4 + \dot{I}_5 + \dot{I}_6 &= 0 \quad \textit{nodo D}\\ \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0 \quad \textit{nodo F}\end{aligned}$$

dividiamo ora le tre espressioni della $\dot{V}_{DF}$ rispettivamente per $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$ e $\bar{Z}_3$, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\dot{V}_{DF}}{\bar{Z}_1} &= -\frac{\bar{Z}_4}{\bar{Z}_1}\dot{I}_4 + \dot{I}_1\\ \frac{\dot{V}_{DF}}{\bar{Z}_2} &= -\frac{\bar{Z}_5}{\bar{Z}_2}\dot{I}_5 + \dot{I}_2\\ \frac{\dot{V}_{DF}}{\bar{Z}_3} &= -\frac{\bar{Z}_6}{\bar{Z}_3}\dot{I}_6 + \dot{I}_3\end{aligned}$$

sommiamo ora membro a membro

$$\dot{V}_{DF}\left(\frac{1}{\bar{Z}_1}+\frac{1}{\bar{Z}_2}+\frac{1}{\bar{Z}_3}\right) = -\frac{\bar{Z}_4}{\bar{Z}_1}\dot{I}_4 + \dot{I}_1 - \frac{\bar{Z}_5}{\bar{Z}_2}\dot{I}_5 + \dot{I}_2 - \frac{\bar{Z}_6}{\bar{Z}_3}\dot{I}_6 + \dot{I}_3 = -\frac{\bar{Z}_4}{\bar{Z}_1}\dot{I}_4 - \frac{\bar{Z}_5}{\bar{Z}_2}\dot{I}_5 - \frac{\bar{Z}_6}{\bar{Z}_3}\dot{I}_6 + \left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3\right)$$

se si verificasse che

$$\frac{\bar{Z}_4}{\bar{Z}_1} = \frac{\bar{Z}_5}{\bar{Z}_2} = \frac{\bar{Z}_6}{\bar{Z}_3} = costante = G$$

allora

$$\dot{V}_{DF}\left(\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}\right) = -G\left(\dot{I}_4 + \dot{I}_5 + \dot{I}_6\right) + \left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3\right)$$

le espressioni fra parentesi tonde non sono altro che le equazioni ai nodi D ed F, per cui

$$\dot{V}_{DF}\left(\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}\right) = 0$$

e quindi

$$\dot{V}_{DF} = 0$$

Possiamo quindi concludere che due stelle squilibrate di impedenze sono in parallelo *se il rapporto delle impedenze derivate dallo stesso conduttore è costante ed uguale per ciascun conduttore*, cioè se è verificato che

$$\frac{\bar{Z}_4}{\bar{Z}_1} = \frac{\bar{Z}_5}{\bar{Z}_2} = \frac{\bar{Z}_6}{\bar{Z}_3} = costante = G$$

Di conseguenza $\bar{Z}_4$ è in parallelo con $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_5$ con $\bar{Z}_2$ e $\bar{Z}_6$ con $\bar{Z}_3$; il sistema si riduce quindi a

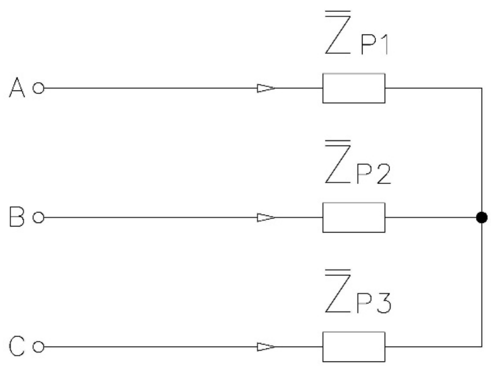

Fig. 2

dove

$$\bar{Z}_{P1} = \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_4}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4} \qquad \bar{Z}_{P2} = \frac{\bar{Z}_2\bar{Z}_5}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_5} \qquad \bar{Z}_{P3} = \frac{\bar{Z}_3\bar{Z}_6}{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_6}$$

Da questo caso generale ne derivano altri due particolari.

Caso particolare 1
Sia dato il sistema di figura 3, costituito da due stelle di impedenze equilibrate e diverse tra loro allora:

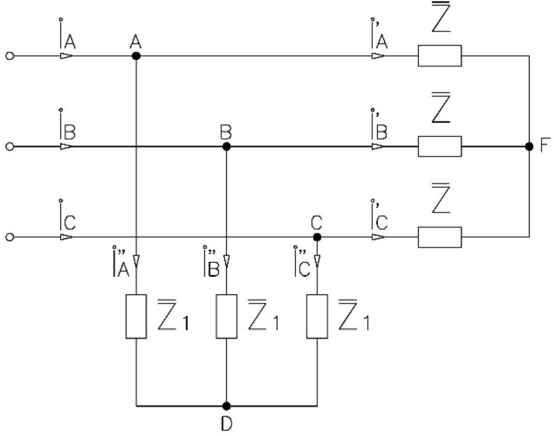

Fig. 3

$$\dot{V}_{DF} = -\bar{Z}_1\dot{I}_A^" + \bar{Z}\dot{I}_A' \quad percorso\ DAF$$
$$\dot{V}_{DF} = -\bar{Z}_1\dot{I}_B^" + \bar{Z}\dot{I}_B' \quad percorso\ DBF$$
$$\dot{V}_{DF} = -\bar{Z}_1\dot{I}_C^" + \bar{Z}\dot{I}_C' \quad percorso\ DCF$$

e

$$\dot{I}_A^" + \dot{I}_B^" + \dot{I}_C^" = 0 \quad nodo\ D$$
$$\dot{I}_A' + \dot{I}_B' + \dot{I}_C' = 0 \quad nodo\ F$$

sommiamo ora membro a membro

$$3\dot{V}_{DF} = -\bar{Z}_1\left(\dot{I}_A^" + \dot{I}_B^" + \dot{I}_C^"\right) + \bar{Z}\left(\dot{I}_A' + \dot{I}_B' + \dot{I}_C'\right)$$

le espressioni fra parentesi tonde non sono altro che le equazioni ai nodi D ed F, per cui

$$3\dot{V}_{DF} = 0$$

e quindi

$$\dot{V}_{DF} = 0$$

per cui l'impedenza $\bar{Z}$ sul conduttore A è in parallelo con la $\bar{Z}_1$ derivata dal medesimo conduttore e così anche per le altre impedenze. Il sistema è quindi equivalente al seguente

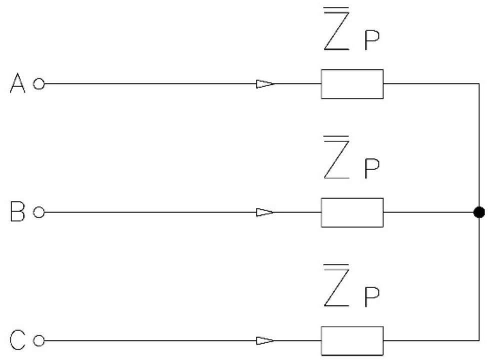

Fig. 4

dove

$$\bar{Z}_P = \frac{\bar{Z}\bar{Z}_1}{\bar{Z} + \bar{Z}_1}$$

Allo stesso risultato, senza però evidenziare il parallelo tra le stelle, si giunge utilizzando le trasformazioni stella-triangolo, infatti ricordando che nel caso di stelle equilibrate si ha

$$\bar{Z}_\Delta = 3\bar{Z}_\lambda$$

otteniamo il sistema di figura 5

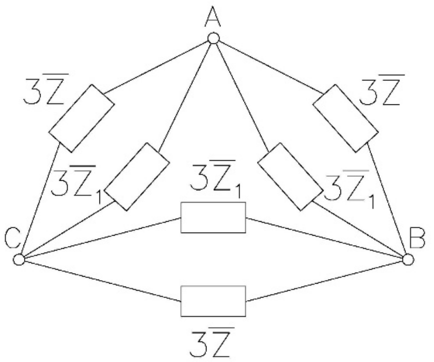

Fig. 5

da cui

$$\bar{Z}_{P\Delta} = \frac{3\bar{Z}3\bar{Z}_1}{3\bar{Z} + 3\bar{Z}_1} = \frac{9\bar{Z}\bar{Z}_1}{3(\bar{Z} + \bar{Z}_1)} = 3\frac{\bar{Z}\bar{Z}_1}{\bar{Z} + \bar{Z}_1}$$

e riportando il carico $\bar{Z}_{\mathrm{P}\Delta}$ a stella, abbiamo $\bar{Z}_{\mathrm{P}} = {}^{\bar{Z}_{\mathrm{P}\Delta}}/_{3} = {}^{\bar{Z}\bar{Z}_1}\big/_{\bar{Z} + \bar{Z}_1}$ $\quad c.v.d.$

Caso particolare 2
Sia dato il medesimo sistema di figura 3, costituito però ora da due stelle di impedenze equilibrate ed uguali tra loro, allora:

$$\dot{V}_{DF} = -\bar{Z}\dot{I}''_A + \bar{Z}\dot{I}'_A \quad percorso\ DAF$$
$$\dot{V}_{DF} = -\bar{Z}\dot{I}''_B + \bar{Z}\dot{I}'_B \quad percorso\ DBF$$
$$\dot{V}_{DF} = -\bar{Z}\dot{I}''_C + \bar{Z}\dot{I}'_C \quad percorso\ DCF$$

e

$$\dot{I}''_A + \dot{I}''_B + \dot{I}''_C = 0 \quad nodo\ D$$
$$\dot{I}'_A + \dot{I}'_B + \dot{I}'_C = 0 \quad nodo\ F$$

sommiamo ora membro a membro

$$3\dot{V}_{DF} = -\bar{Z}\left(\dot{I}''_A + \dot{I}''_B + \dot{I}''_C\right) + \bar{Z}\left(\dot{I}'_A + \dot{I}'_B + \dot{I}'_C\right)$$

le espressioni fra parentesi tonde non sono altro che le equazioni ai nodi D ed F, per cui

$$3\dot{V}_{DF} = 0$$

e quindi

$$\dot{V}_{DF} = 0$$

per cui l'impedenza $\bar{Z}$ sul conduttore A è in parallelo con la $\bar{Z}$ derivata dal medesimo conduttore e così anche per le altre impedenze. Il sistema è quindi equivalente al seguente

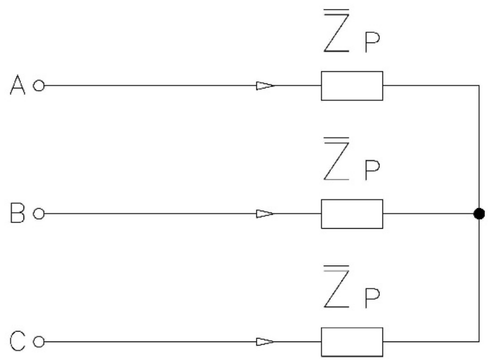

Fig. 6

dove

$$\bar{Z}_P = \frac{\bar{Z}\bar{Z}}{\bar{Z}+\bar{Z}} = \frac{\bar{Z}^2}{2\bar{Z}} = \frac{\bar{Z}}{2}$$

Sommario

Caso generale 2
Caso particolare 1 4
Caso particolare 2 6
Sommario 7