

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA  
*Dipartimento di Ingegneria*  
*Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina*

## ***Appunti Corso di Elettrotecnica***

***I generatori controllati  
nella risoluzione dei circuiti elettrici***

*Anno Accademico 2016-2017*

*dott. ing. Vito Puliafito*

*prof. ing. Bruno Azzerboni*

## 1. Introduzione

Un *generatore dipendente*, o *controllato*, o *pilotato*, è un dispositivo che genera una tensione o una corrente, in funzione di una tensione o di una corrente presente in un'altra parte del circuito. La grandezza da cui dipende il generatore è chiamata *grandezza di controllo* o *grandezza pilota*.

È bene rilevare subito che tali dispositivi possono agire sia in un sistema con grandezze stazionarie, cioè in regime continuo, sia in un sistema con grandezze variabili nel tempo, per esempio in regime alternato.

Nelle formule utilizzeremo le lettere maiuscole che, come ben noto, indicano grandezze continue; le definizioni, tuttavia, sono valide anche nei regimi dinamici per i valori istantanei. Utilizzeremo inoltre il pedice *u* per le grandezze generate in uscita, e il pedice *i* per le grandezze che pilotano in ingresso.

I generatori dipendenti possono essere di quattro tipi, rappresentati in Figura 1:

- **generatore di tensione dipendente da una tensione (GTDT)**, fig. 1a), definito da una *grandezza adimensionale*  $\alpha_V$ :

$$V_u = \alpha_V V_i \quad (1)$$

- **generatore di tensione dipendente da una corrente (GTDC)**, fig. 1b), definito mediante la *resistenza differenziale*  $R_m$ :

$$V_u = R_m I_i \quad (2)$$

- **generatore di corrente dipendente da una tensione (GCDT)**, fig. 1c), definito mediante una *transconduttanza*  $G_m$ :

$$I_u = G_m V_i \quad (3)$$

- **generatore di corrente dipendente da una corrente (GCDC)**, fig. 1d), definito da una *grandezza adimensionale*  $\alpha_I$ :

$$I_u = \alpha_I I_i \quad (4)$$

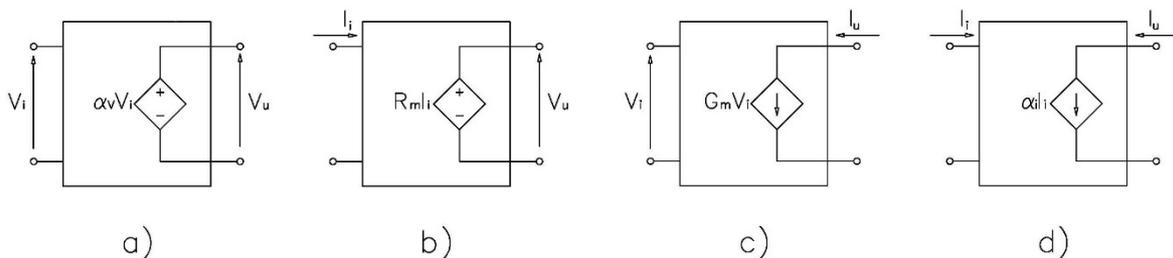


Figura 1 - Generatori dipendenti: (a) GTDT, (b) GTDC, (c) GCDT, (d) GCDC.

Le relazioni (1)-(4) sono lineari, per cui in questi casi si parla di *generatori dipendenti lineari*; nel caso generale di generatori dipendenti, invece, le Eq. (1)-(4) saranno scritte nella forma:

$$\begin{aligned} V_u &= f(V_i) \quad \text{per un GTDT} \\ V_u &= f(I_i) \quad \text{per un GTDC} \\ I_u &= f(V_i) \quad \text{per un GCDT} \\ I_u &= f(I_i) \quad \text{per un GCDC} \end{aligned} \quad (5)$$

Noi, tuttavia, studieremo solo il caso di generatori dipendenti lineari.

Così come avviene per i generatori indipendenti, inoltre, anche nel caso di generatori dipendenti è possibile distinguere quelli ideali da quelli reali, avendo i secondi una resistenza propria: in serie se di tensione, in parallelo se di corrente.

## 2. Analisi dei circuiti elettrici alla presenza di generatori dipendenti

La presenza di generatori dipendenti in un circuito elettrico può rendere l'analisi del circuito più difficoltosa poiché, di fatto, un generatore dipendente introduce una relazione tra grandezze del circuito che si riflette in un'ulteriore equazione nei sistemi di risoluzione.

A seguire, comunque, vedremo come i diversi metodi risolutivi e i teoremi delle reti possano essere applicati quando uno o più generatori dipendenti siano presenti nei rami di un circuito.

Nel dettaglio, richiameremo le leggi di Kirchhoff, il teorema di Millman e i principi di Thevenin e Norton, analizzando la loro applicazione alla presenza di generatori dipendenti.

### 2.1 Le leggi di Kirchhoff

Le leggi di Kirchhoff sono due relazioni connesse con la conservazione della carica e dell'energia nei circuiti elettrici.

La *legge di Kirchhoff delle correnti* (LKC o LKI) afferma che, definita una superficie chiusa che contenga un circuito elettrico, la somma algebrica delle correnti che attraversano la superficie, con segno diverso se entranti o uscenti, è nulla:

$$\sum_{\sigma} I_k = 0 \quad (6)$$

dove  $\sigma$  è la superficie chiusa e  $I_k$  il valore della  $k$ -esima corrente che attraversa  $\sigma$ .

La LKC è detta anche legge ai nodi poiché la superficie chiusa può ridursi ad un nodo, per cui si può affermare che, dato un nodo e supposto che in esso non ci sia né generazione né accumulo di cariche, la somma algebrica delle correnti entranti e/o uscenti è nulla.

La *legge di Kirchhoff delle tensioni* (LKT o LKV) afferma che la somma algebrica delle tensioni lungo un percorso chiuso e orientato, con il segno appropriato in funzione del verso di percorrenza, è pari a zero.

$$\sum V_k = 0 \quad (7)$$

La LKT è detta anche legge alle maglie. Rammentiamo che per maglia s'intende un qualsiasi percorso chiuso, costituito da lati (rami) della rete, che ci permette di partire da un nodo e tornarci, passando una sola volta da ogni ramo che costituisce la maglia stessa. Possiamo, quindi, affermare che, data una maglia e fissato un verso di percorrenza della stessa, la somma algebrica delle tensioni ai nodi di ciascun ramo è nulla.

È noto che in un circuito elettrico si possono determinare le correnti che scorrono nei propri rami utilizzando le due leggi di Kirchhoff.

Nel dettaglio, se un circuito è costituito da  $n$  nodi,  $m$  maglie e  $r$  rami per determinare le  $r$  correnti incognite, è sufficiente risolvere il sistema di  $r$  equazioni linearmente indipendenti così suddivise:  $n-1$  equazioni ai nodi LKC,  $r-(n-1)$  equazioni alle maglie LKT, queste ultime secondo la nota regola del taglio.

La metodologia sopra descritta può essere applicata anche in presenza di generatori controllati, per ognuno dei quali, tuttavia, può essere necessario aggiungere una ulteriore equazione al sistema.

Facciamo alcuni esempi.

*Esempio 1 - Risoluzione di un circuito con un GTDT tramite leggi di Kirchhoff*

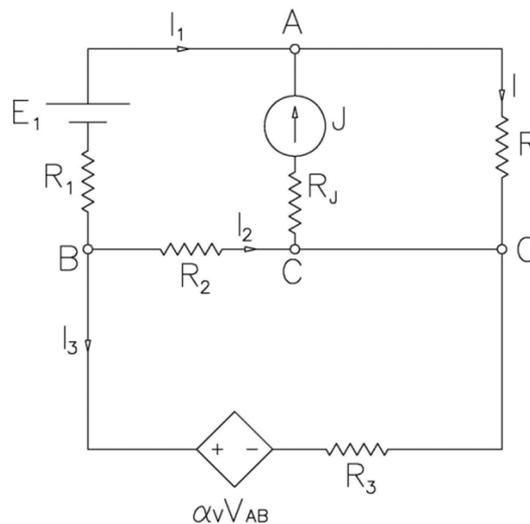


Figura 2 - Circuito con un GTDT relativo all'Esempio 1.

Nel circuito rappresentato in Figura 2, è installato un generatore di tensione dipendente da una tensione tramite la grandezza adimensionale  $\alpha_V$ . La grandezza pilota deve sempre essere chiaramente indicata nel circuito e, in questo caso, è la tensione tra i nodi A e B indicati.

I versi delle correnti saranno scelti da noi, come sempre, in maniera totalmente arbitraria.

Il circuito è costituito da 3 nodi: A e B già indicati, e C (si stia attenti al cortocircuito per cui i due nodi collegati tra di loro dal corto circuito coincidono). I rami sono 5: quello contenente  $E_1-R_1$ , quello con  $R_2$ , quello con  $J-R_J$ , quello con  $R$ , e quello con il generatore reale di tensione dipendente dalla tensione  $V_{AB}$ , il generatore reale ha una f.e.m. pari a  $\alpha_V V_{AB}$  ed una resistenza serie  $R_3$ . Tra questi rami, vi è quello con il generatore di corrente J, che prevale sulla resistenza in serie  $R_J$ , per cui in quel ramo la corrente è nota e vale proprio J. I rami con correnti incognite sono quindi  $r = 4$ , i nodi sono sempre  $n = 3$ . Dobbiamo quindi scrivere 4 equazioni nelle 4 correnti incognite  $I_1, I_2, I_3$  e I. Di queste 4 equazioni,  $n - 1 = 2$  saranno ai nodi, le restanti  $r - (n - 1) = 2$  saranno alle maglie:

- Legge al nodo A:

$$I_1 + J - I = 0 \tag{8}$$

in cui sono col segno positivo le correnti entranti, con il segno negativo quelle uscenti;

- Legge al nodo C:

$$I_2 - J + I + I_3 = 0 \tag{9}$$

dove si è utilizzata la stessa convenzione dei segni per la legge al nodo A;

- Legge alla maglia  $R_1-E_1-R-R_2- R_1$ :

$$E_1 = R_1 I_1 + R I - R_2 I_2 \tag{10}$$

nella quale si è stabilito il verso di percorrenza orario, come rappresentato dalla successione dei bipoli attraverso i quali si è indicata maglia scelta;

- Legge alla maglia  $R_2-R_3-\alpha_V V_{AB}- R_2$ :

$$\alpha_V V_{AB} = R_2 I_2 - R_3 I_3 \tag{11}$$

nella quale si è stabilito il verso di percorrenza orario. È importante notare che nell'eq. (11), il generatore di tensione è stato considerato come se fosse indipendente, per quanto dipendente. Si ricordi che la maglia utilizzata è l'ultima rimasta dopo aver tagliato un ramo qualunque della maglia precedentemente analizzata; è da evidenziare, infatti, l'impossibilità di scegliere una maglia contenente il ramo con il generatore di corrente J poiché la tensione ai morsetti di tale generatore è, sempre, indeterminata.

Le eq. (8)-(11) sono però 4 equazioni con 5 variabili incognite, le attese  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I$ , e  $V_{AB}$ , dovuta alla presenza del generatore controllato. Avendo 5 incognite, necessitiamo di una quinta equazione che le leghi; essa sarà proprio la legge che esprime  $V_{AB}$ , cioè la legge di Ohm generalizzata tra i nodi A e B:

$$V_{AB} = E_1 - R_1 I_1 \quad (12)$$

Risolvendo il sistema delle 5 eq. (8)-(12), otterremo i valori delle 5 incognite, e in particolare i valori delle 4 correnti desiderate  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I$ .

$$\text{Nodo A)} \quad I_1 + J - I = 0 \quad (8)$$

$$\text{Nodo C)} \quad I_2 - J + I + I_3 = 0 \quad (9)$$

$$\text{Maglia R1-E1-R-R2-R1)} \quad E_1 = R_1 I_1 + R I - R_2 I_2 \quad (10)$$

$$\text{Maglia R2-R3-}\alpha_V V_{AB}\text{- R2)} \quad \alpha_V V_{AB} = R_2 I_2 - R_3 I_3 \quad (11)$$

$$\text{Ohm Nodi A e B)} \quad V_{AB} = E_1 - R_1 I_1 \quad (12)$$

Nel prossimo caso vediamo cosa cambia se il generatore di tensione dipende da una delle correnti, per esempio dalla  $I$  che scorre in  $R$ .

*Esempio 2 - Risoluzione di un circuito con un GTDC tramite leggi di Kirchhoff*

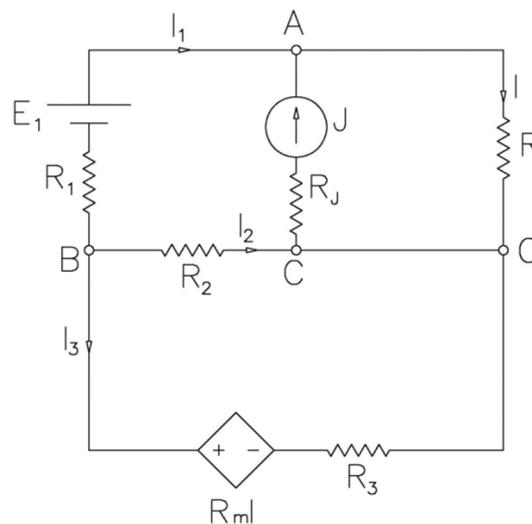


Figura 3 - Circuito con un GTDC relativo all'Esempio 2.

Nel circuito di Figura 3 è presente un generatore di tensione dipendente da una corrente tramite la resistenza differenziale  $R_m$ . La grandezza pilota è la corrente  $I$  indicata nel ramo  $R$ . Le restanti correnti possono essere scelte da noi in maniera arbitraria e le scegliamo, per comodità, con lo stesso verso dell'esempio precedente.

I nodi sono sempre  $n = 3$  e le incognite sempre  $r = 4$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I$ . Abbiamo ancora bisogno di  $n - 1 = 2$  equazioni ai nodi, e  $r - (n - 1) = 2$  equazioni alle maglie. Le equazioni ai nodi, se continuiamo a scegliere A e C, coincidono con le eq. (8)-(9) dell'esempio precedente. La prima equazione alla maglia può essere quella dell'eq. (10). L'ultima equazione alla maglia, invece, sarà diversa poiché adesso il generatore dipendente è diverso:

– Legge alla maglia  $R_2$ - $R_3$ -  $R_m I$ -  $R_2$ :

$$R_m I = R_2 I_2 - R_3 I_3 \quad (13)$$

In questo caso, le eq. (8)-(9)-(10) e (13) sono 4 equazioni nelle 4 correnti incognite per cui sono sufficienti per risolvere il sistema.

$$\text{Nodo A)} \quad I_1 + J - I = 0 \quad (8)$$

$$\text{Nodo C)} \quad I_2 - J + I + I_3 = 0 \quad (9)$$

$$\text{Maglia R1-E1-R-R2-R1)} \quad E_1 = R_1 I_1 + R I - R_2 I_2 \quad (10)$$

$$\text{Maglia R2-R3- RmI- R2)} \quad R_m I = R_2 I_2 - R_3 I_3 \quad (13)$$

Nei prossimi due esempi il generatore dipendente genera corrente in funzione di una tensione (Esempio 3) e, poi, di una corrente (Esempio 4).

*Esempio 3 - Risoluzione di un circuito con un GCDT tramite leggi di Kirchhoff*

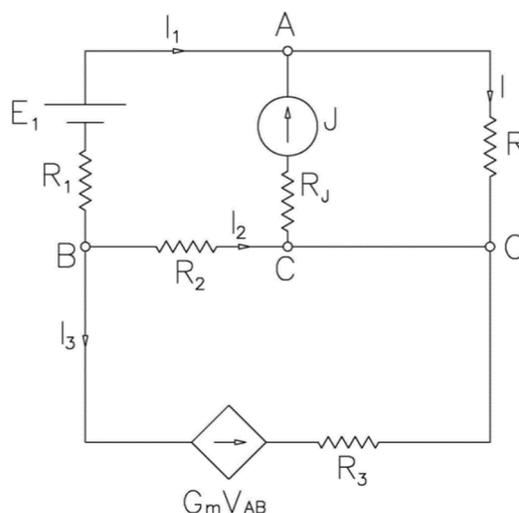


Figura 4 - Circuito con un GCDT relativo all'Esempio 3.

Nel circuito di Figura 4 è installato un generatore di corrente dipendente dalla tensione  $V_{AB}$  tramite la transconduttanza  $G_m$ . Il generatore di corrente, seppur dipendente, impone la corrente sul ramo in cui si trova, quindi ai fini della risoluzione tramite leggi di Kirchhoff, deve essere trattato come il generatore indipendente J. Il numero di nodi resta quindi uguale a prima,  $n = 3$ , mentre il numero di incognite, che possiamo identificare nel numero di rami senza generatori di corrente, è  $r = 3$ , essendo le incognite  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I$ . Dobbiamo quindi scrivere 3 equazioni, di cui di  $n - 1 = 2$  equazioni ai nodi, e  $r - (n - 1) = 1$  equazioni alle maglie. Al nodo A, la legge al nodo resta la stessa di eq. (8). Cambia la legge al secondo nodo:

– Legge al nodo C:

$$I_2 - J + I + G_m V_{AB} = 0 \quad (14)$$

dove si è utilizzata la stessa convenzione dei segni per la legge al nodo A e si è considerato che nel ramo con il generatore di corrente, la corrente è  $G_m V_{AB}$  ed entra nel nodo C;

L'unica equazione alla maglia che serve è anche quella all'unica maglia possibile (che non contiene generatori di corrente), cioè la maglia  $R_1$ - $E_1$ - $R$ - $R_2$ - $R_1$  già descritta dall'eq. (10). Le equazioni (8), (10) e (14) costituiscono un sistema di 3 equazioni nelle 3 correnti incognite attese  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I$ , più l'incognita  $V_{AB}$  dovuta alla presenza del generatore dipendente. È necessario quindi aggiungere una quarta equazione al sistema che è, come nell'Esempio 1, la legge di Ohm generalizzata tra A e B, già espressa dall'eq. (12). Le equazioni (8), (10), (12) e (14) formano un sistema che, risolto, ci dà i valori richiesti di  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I$ , e quello di  $V_{AB}$ .

$$\text{Nodo A)} \quad I_1 + J - I = 0 \quad (8)$$

$$\text{Maglia R1-E1-R-R2-R1)} \quad E_1 = R_1 I_1 + R I - R_2 I_2 \quad (10)$$

$$\text{Ohm Nodi A e B)} \quad V_{AB} = E_1 - R_1 I_1 \quad (12)$$

$$\text{Nodo C)} \quad I_2 - J + I + G_m V_{AB} = 0 \quad (14)$$

Noto il valore di  $V_{AB}$ , possiamo calcolare la corrente che scorre nel ramo con il generatore dipendente, pari a  $G_m V_{AB}$ .

*Esempio 4 - Risoluzione di un circuito con un GCDC tramite leggi di Kirchhoff*

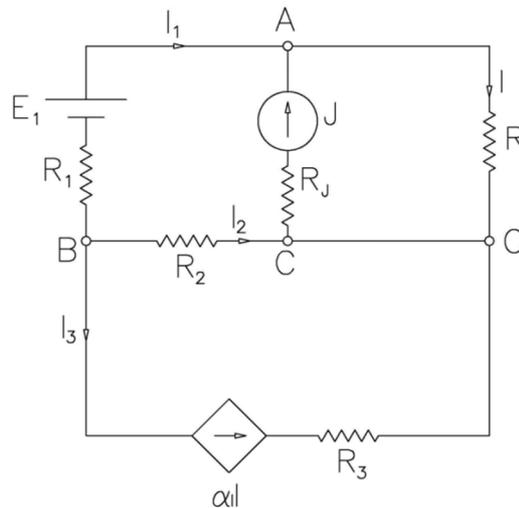


Figura 5 - Circuito con un GCDC relativo all'Esempio 4.

Nel circuito di Figura 5 abbiamo un generatore di corrente dipendente dalla corrente  $I$  tramite la grandezza adimensionale  $\alpha_1$ . Come nell'esempio precedente, il numero di nodi è  $n=3$ , mentre il numero di incognite, corrispondenti ai rami senza generatori di corrente, è  $r=3$ , essendo le incognite  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I$ . Dobbiamo quindi scrivere 3 equazioni, di cui  $n-1=2$  equazioni ai nodi, e  $r-(n-1)=1$  equazioni alle maglie. Al nodo A, la legge coincide con l'eq. (8). Cambia solo la legge al secondo nodo:

– Legge al nodo C:

$$I_2 - J + I + \alpha_1 I = 0 \quad (15)$$

dove si è utilizzata la stessa convenzione dei segni per la legge al nodo A e si è considerato che nel ramo con il generatore di corrente, la corrente è  $\alpha_1 I$  ed entra nel nodo C;

L'unica equazione alla maglia che serve è quella già descritta dall'eq. (10). Le equazioni (8), (10) e (15) costituiscono quindi un sistema di 3 equazioni nelle 3 correnti incognite attese  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I$  che, risolto, ci dà i valori richiesti delle 3 correnti.

$$\text{Nodo A)} \quad I_1 + J - I = 0 \quad (8)$$

$$\text{Maglia R1-E1-R-R2-R1)} \quad E_1 = R_1 I_1 + R I - R_2 I_2 \quad (10)$$

$$\text{Nodo C)} \quad I_2 - J + I + \alpha_1 I = 0 \quad (15)$$

Noto il valore di  $I$ , possiamo calcolare la corrente che scorre nel ramo con il generatore dipendente, pari a  $\alpha_1 I$ .

Dagli esempi 1-4 deduciamo che:

*Nel risolvere un circuito elettrico tramite un sistema di leggi di Kirchhoff, eventuali generatori di tensione e di corrente dipendenti devono essere trattati nelle equazioni come quelli indipendenti. Tuttavia, per ogni generatore dipendente da una tensione sarà necessario aggiungere al sistema un'equazione in più che esprima la tensione pilota in funzione delle correnti incognite.*

Tutto ciò che si è detto è, chiaramente, valido anche in regime sinusoidale introducendo i vettori rotanti, rappresentativi di tensione e corrente, e l'operatore impedenza.

## 2.2 Teorema di Millman

Il teorema di Millman afferma che un sistema di rami in parallelo, ciascuno contenente un generatore reale di tensione e quindi costituito da una f.e.m. e da una resistenza in serie, è equivalente ad un solo ramo contenente un generatore reale di tensione, detto generatore di Millman.

Il generatore di Millman è costituito da una f.e.m. pari alla somma pesata delle singole f.e.m. dei rami con pesi le conduttanze equivalenti degli stessi rami, e da una resistenza in serie data dal parallelo delle resistenze equivalenti dei rami.

È importante ricordare che il teorema di Millman perde di valore se tra i rami in parallelo c'è un generatore ideale di tensione, poiché questo ultimo, impone la propria tensione ai nodi del parallelo.

Va evidenziato ancora che il teorema di Millman può essere applicato se tra i rami in parallelo ci sono rami con generatori di corrente e/o rami con sole resistenze. In questo caso, il teorema si può estendere dicendo che la f.e.m. del generatore equivalente di Millman è il rapporto tra la somma algebrica delle correnti di cortocircuito di ogni singolo ramo in parallelo e la somma delle conduttanze equivalenti dei singoli rami, resi passivi. La resistenza serie, invece, è pari all'inverso della somma delle conduttanze equivalenti dei singoli rami resi passivi.

Quando tra i rami in parallelo c'è un generatore dipendente, esso può essere incluso nella trasformazione del sistema di rami in parallelo nel generatore equivalente di Millman. Tuttavia, quest'ultimo sarà esso stesso un generatore dipendente dalle medesime variabili di controllo che pilotano i generatori dipendenti presenti nel sistema di partenza.

Facciamo un esempio.

*Esempio 5 - Risoluzione di un circuito con generatori dipendenti tramite il teorema di Millman*

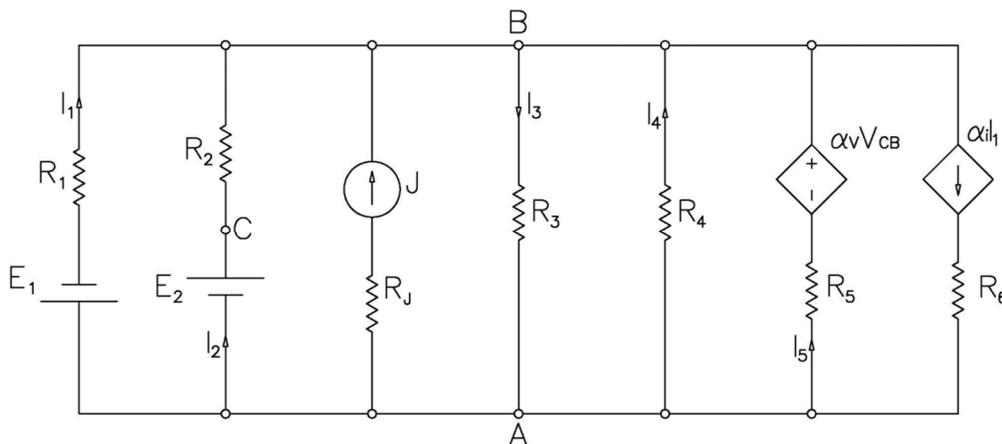


Figura 6 - Circuito con generatori dipendenti relativo all'Esempio 5.

Nel circuito di Figura 6, visto dai nodi A e B, abbiamo 7 rami in parallelo, due con generatori reali di tensione  $E_1$ - $R_1$  e  $E_2$ - $R_2$ , uno con generatore ideale di corrente  $J$  e resistenza in serie  $R_J$ , due con una resistenza  $R_3$  e  $R_4$ , uno con un GTDT reale con resistenza in serie  $R_5$ , l'ultimo con un GCDC ideale e con in serie  $R_6$ . Il GTDT dipende dalla tensione  $V_{CB}$  ai capi di  $R_2$ , il GCDC dipende dalla corrente  $I_1$  che scorre su  $R_1$ .

L'intero sistema equivale per il teorema di Millman a un generatore equivalente di tensione reale dipendente, rappresentato in Figura 7.

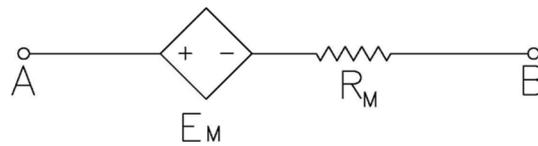


Figura 7 - Generatore di Millman equivalente al circuito di Figura 6.

La f.e.m. del generatore di Millman è:

$$E_M = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - J - \frac{\alpha_V V_{CB}}{R_5} + \alpha_I I_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \quad (16)$$

La resistenza serie del generatore di Millman è:

$$R_M = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \quad (17)$$

Occorre notare che:

- il generatore di Millman non dipende in alcun modo da  $R_J$  e  $R_6$  che sono resistenze in serie a generatori di corrente ideali;
- la f.e.m. di Millman dipende da  $V_{CB}$  e  $I_1$ , che sono le grandezze pilota non note;
- la resistenza di Millman è nota e non dipende né dalle grandezze pilota né dalle grandezze adimensionali che definiscono i generatori dipendenti

Considerato che il generatore equivalente di Millman è, in questo caso, un ramo aperto, risulta:

$$V_{AB} = E_M(V_{CB}, I_1) = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - J - \frac{\alpha_V V_{CB}}{R_5} + \alpha_I I_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \quad (18)$$

cioè la tensione  $V_{AB}$  è funzione delle due variabili pilota  $V_{CB}$  e  $I_1$ .

Qualora non ci fossero stati i generatori dipendenti, la  $V_{AB}$  sarebbe stata un valore noto e, a questo punto, le correnti incognite del circuito di Figura 6 si sarebbero potute calcolare facilmente applicando la legge di Ohm generalizzata ai rami di interesse.

L'equazione (18), d'altra parte, è un'equazione nelle 3 incognite  $V_{AB}$ ,  $V_{CB}$  e  $I_1$ . Dobbiamo quindi ricavare altre due equazioni che legano queste 3 incognite.

Esse sono la legge di Ohm generalizzata al ramo con  $E_1$ - $R_1$ :

$$V_{AB} = E_1 + R_1 I_1 \quad (19)$$

e la legge di Ohm generalizzata al ramo con  $E_2$ - $R_2$ , in cui indichiamo direttamente che  $V_{CB} = R_2 I_2$ :

$$V_{AB} = -E_2 + V_{CB} \quad (20)$$

Le eq. (18)-(20) costituiscono un sistema che ci permette il calcolo di  $V_{AB}$ ,  $V_{CB}$  e  $I_1$ .

$$V_{AB} = E_M(V_{CB}, I_1) = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - J - \frac{\alpha_V V_{CB}}{R_5} + \alpha_1 I_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \quad (18)$$

$$V_{AB} = E_1 + R_1 I_1 \quad (19)$$

$$V_{AB} = -E_2 + V_{CB} \quad (20)$$

Per determinare tutte le correnti, si può quindi procedere utilizzando le leggi di Ohm generalizzate tra i nodi A e B:

$$\begin{aligned} V_{AB} = -E_2 + R_2 I_2 &\Rightarrow I_2 = \frac{V_{AB} + E_2}{R_2} \\ V_{AB} = -R_3 I_3 &\Rightarrow I_3 = -\frac{V_{AB}}{R_3} \\ V_{AB} = R_4 I_4 &\Rightarrow I_4 = \frac{V_{AB}}{R_4} \\ V_{AB} = -\alpha_V V_{CB} + R_5 I_5 &\Rightarrow I_5 = \frac{V_{AB} + \alpha_V V_{CB}}{R_5} \end{aligned} \quad (21)$$

Inoltre sul ramo con il generatore di corrente  $J$  la corrente è nota ed è pari a  $J$ , sul ramo con il GCDC la corrente è imposta dal generatore di corrente ed è  $\alpha_1 I_1$  e può essere calcolata dopo aver ottenuto il valore di  $I_1$  dal sistema di eq. (18)-(20).

Talvolta, nella rappresentazione di un generatore di Millman equivalente a rami con generatori dipendenti, si utilizza suddividere la f.e.m. equivalente nella sua parte indipendente e nella sua parte dipendente, come in Figura 8, dove:

$$E_M^I = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \quad (22)$$

e:

$$E_M^{II} = \frac{-\frac{\alpha_V V_{CB}}{R_5} + \alpha_1 I_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \quad (23)$$

essendo chiaramente  $E_M = E_M^I + E_M^{II}$ .

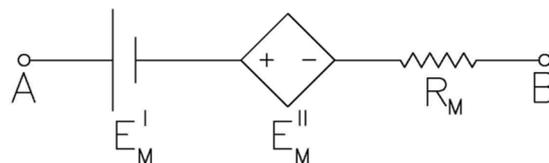


Figura 8 - Generatore di Millman equivalente al circuito in Figura 6.

Testiamo la validità di questo procedimento assegnando valori numerici ai bipoli del circuito di Figura 6 e determinando le correnti incognite sia tramite il teorema di Millman, sia tramite le leggi di Kirchhoff.

Si considerino  $E_1=2$  V,  $R_1=1$   $\Omega$ ,  $E_2=1$  V,  $R_2=2$   $\Omega$ ,  $J=0.1$  A,  $R_J=3$   $\Omega$ ,  $R_3=5$   $\Omega$ ,  $R_4=1$   $\Omega$ ,  $\alpha_1=2$ ,  $R_5=7$   $\Omega$ ,  $\alpha_V=3.5$ ,  $R_6=4$   $\Omega$ .  
Le eq. (18)-(20) diventano:

$$\begin{cases} V_{AB} = \frac{1.4 - 0.5V_{CB} + 2I_1}{2.84} \\ V_{AB} = 2 + I_1 \\ V_{AB} = -1 + V_{CB} \end{cases} \quad \begin{cases} V_{AB} + 0.18V_{CB} - 0.70I_1 = 0.49 \\ V_{AB} - I_1 = 2 \\ V_{AB} - V_{CB} = -1 \end{cases} \quad (24)$$

Il sistema di eq. (24) fornisce i valori per le tre incognite:

$$\begin{aligned} V_{AB} &= -2.27 \text{ V} \\ V_{CB} &= -1.27 \text{ V} \\ I_1 &= -4.27 \text{ A} \end{aligned} \quad (25)$$

Le altre correnti sono:

$$\begin{aligned} I_2 &= -0.64 \text{ A} \\ I_3 &= 0.45 \text{ A} \\ I_4 &= -2.27 \text{ A} \\ I_5 &= -0.96 \text{ A} \end{aligned} \quad (26)$$

Infine, sul ramo con il generatore di corrente  $J$  la corrente è 0.1 A, sul ramo con il GCDC la corrente è imposta dal generatore di corrente ed è  $\alpha_1 I_1 = -8.54$  A.

Risolviamo quindi il circuito di Figura 6 tramite le leggi di Kirchhoff. Il numero di nodi è  $n = 2$ , il numero di incognite, corrispondenti ai rami senza generatori di corrente, è  $r = 5$ , e precisamente  $I_1, I_2, I_3, I_4$  e  $I_5$ .

Si evidenzia ancora che sul ramo con il generatore di corrente  $J$  la corrente è nota ed è pari a  $J$ , sul ramo con il GCDC la corrente è imposta dal generatore di corrente ed è  $\alpha_1 I_1$ .

Dobbiamo quindi scrivere 5 equazioni, di cui di  $n-1=1$  equazioni ai nodi, e  $r-(n-1)=4$  equazioni alle maglie. Inoltre, essendo presente un generatore dipendente da una tensione dobbiamo aggiungere una sesta equazione per esprimere quella tensione:

- Legge al nodo B:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + J - I_3 + I_4 + I_5 - \alpha_1 I_1 &= 0 \\ -I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + I_5 &= -0.1 \end{aligned} \quad (27)$$

chiaramente col segno positivo le correnti entranti, con il segno negativo quelle uscenti; nella equazione abbiamo già sostituito i valori numerici, come faremo anche nelle seguenti;

- Legge alla maglia  $E_1$ - $R_1$ - $R_2$ - $E_2$ -  $E_1$ :

$$\begin{aligned} -E_1 - E_2 &= R_1 I_1 - R_2 I_2 \\ I_1 - 2I_2 &= -3 \end{aligned} \quad (28)$$

dove il verso di percorrenza è quello orario come evidenziato già nella descrizione della maglia. Tagliando uno dei rami appartenenti alla maglia esaminata, per esempio  $E_1$ - $R_1$ , possiamo procedere con la successiva legge;

- Legge alla maglia  $E_2$ - $R_2$ - $R_3$ -  $E_2$ :

$$\begin{aligned} E_2 &= R_2 I_2 + R_3 I_3 \\ 2I_2 + 5I_3 &= 1 \end{aligned} \quad (29)$$

qui tagliamo il ramo con  $E_2$ - $R_2$ ;

- Legge alla maglia A-R<sub>3</sub>-B-R<sub>4</sub>-A:

$$\begin{aligned} 0 &= -R_3 I_3 - R_4 I_4 \\ 5I_3 + I_4 &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

tagliando il ramo con R<sub>3</sub> resta solo una maglia che non contiene generatori di corrente;

- Legge alla maglia R<sub>4</sub>-α<sub>V</sub>V<sub>CB</sub>-R<sub>5</sub>-R<sub>4</sub>:

$$\begin{aligned} -\alpha_V V_{CB} &= R_4 I_4 - R_5 I_5 \\ I_4 - 7I_5 + 3.5V_{CB} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

- Legge di Ohm tra C e B:

$$\begin{aligned} V_{CB} &= R_2 I_2 \\ 2I_2 - V_{CB} &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Le eq. (27)-(32) costituiscono un sistema di sei equazioni in sei incognite, la cui risoluzione fornisce i risultati:

$$\begin{aligned} I_1 &= -4.31 \text{ A} \\ I_2 &= -0.65 \text{ A} \\ I_3 &= 0.46 \text{ A} \\ I_4 &= -2.31 \text{ A} \\ I_5 &= -0.98 \text{ A} \\ V_{CB} &= -1.31 \text{ V} \end{aligned} \quad (33)$$

che, a parte le approssimazioni, coincidono con le soluzioni ottenute tramite il teorema di Millman e indicate nelle (25)-(26).

Dall'esempio 5 si evince che:

*Alla presenza di generatori dipendenti in rami in parallelo (nessuno dei quali includa un generatore ideale di tensione), tale sistema è equivalente ad un generatore reale di tensione, il generatore di Millman, costituito da una f.e.m. dipendente dalle variabili di controllo dei generatori dipendenti del sistema di partenza, e da una resistenza nota. Le espressioni della f.e.m. e della resistenza sono quelle date dall'enunciato del teorema di Millman, sopra riportato. **Per la risoluzione del circuito, sarà quindi necessario trovare delle equazioni ulteriori per legare tra di loro la f.e.m. di Millman e le grandezze di controllo.***

Anche in questo caso, tutto ciò che si è detto è, chiaramente, valido anche in regime sinusoidale introducendo i vettori rotanti, rappresentativi di tensione e corrente, e l'operatore impedenza.

### 2.3 Principi di Thevenin e Norton

I principi di Thevenin e Norton permettono la semplificazione di una rete con un generatore reale di tensione e un generatore reale di corrente, rispettivamente.

Il *principio di Thevenin* afferma che, data una rete N lineare, univoca, comunque complessa, vista da due punti A e B, essa è equivalente a un generatore reale di tensione, detto generatore di Thevenin, la cui f.e.m. è la tensione a vuoto tra i punti A e B passando dalla rete, e la cui resistenza in serie è data dalla resistenza della rete, resa passiva, vista dai punti A e B.

Il *principio di Norton* afferma che, data una rete N lineare, univoca, comunque complessa, vista da due punti A e B, essa è equivalente a un generatore reale di corrente, detto generatore di Norton, la cui corrente generata è la corrente di cortocircuito tra A e B, e la cui resistenza in parallelo è data dalla resistenza della rete, resa passiva, vista dai punti A e B.

I due principi sono uno il duale dell'altro. La resistenza serie del generatore di Thevenin coincide con la resistenza in parallelo del generatore di Norton.

Quando la rete  $N$  contiene generatori dipendenti, i principi di Thevenin e di Norton possono ancora essere applicati. I generatori equivalenti, tuttavia, potranno presentare le variabili di controllo nella loro f.e.m. generata, nel caso di Thevenin, e nella loro corrente generata, nel caso di Norton, oppure le loro resistenze, in serie per Thevenin, in parallelo per Norton, potranno dipendere dai parametri di proporzionalità che definiscono i generatori dipendenti. Questo dipende fondamentalmente dal fatto che la variabile di controllo sia interna o esterna alla rete da semplificare.

Analizziamo ora, per chiarire meglio quanto detto, due esempi.

*Esempio 6 - Semplificazione di una rete con un generatore dipendente da una grandezza interna alla rete stessa, attraverso il principio di Thevenin*

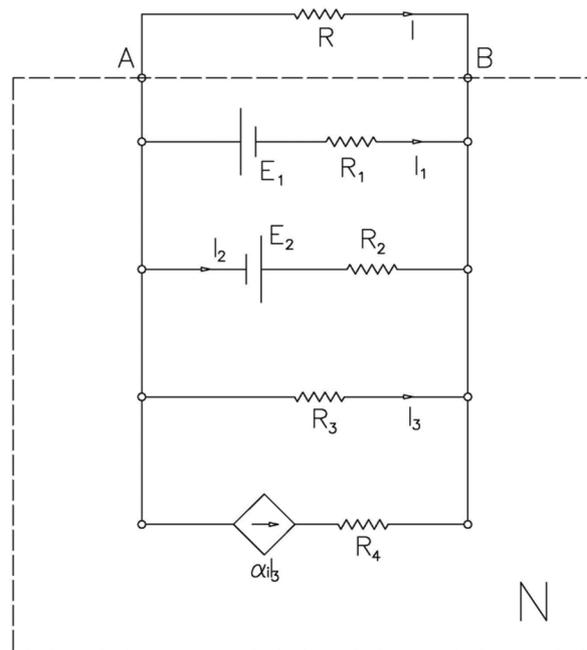


Figura 9 - Circuito elettrico relativo all'Esempio 6. La rete  $N$  contiene un generatore dipendente da una grandezza interna alla rete  $N$  stessa, e deve essere semplificato con il principio di Thevenin.

Il circuito di Figura 9 è costituito da 5 rami in parallelo, due con generatori reali indipendenti di tensione, due con una resistenza, uno con un GCDC ideale e una resistenza in serie. Il circuito può essere risolto sia tramite le leggi di Kirchhoff, sia tramite il teorema di Millman considerato che i rami, visti dai nodi A e B, sono in parallelo. Vogliamo però calcolare la corrente che scorre su  $R$ , la  $I$ , tramite Thevenin, cioè sostituendo la rete  $N$  evidenziata con il generatore equivalente di Thevenin.

Il GCDC fa parte della rete e dipende da una grandezza, la corrente  $I_3$ , interna alla rete stessa. Se supponiamo lineari i bipoli che compongono la rete  $N$ , fatta eccezione per i generatori indipendenti  $E_1$  e  $E_2$ , la rete  $N$  sarà lineare e, vista dai punti A e B, o anche dalla  $R$ , sarà equivalente ad un generatore reale di tensione, il generatore di Thevenin, secondo la definizione nota.

Calcoliamo la f.e.m. del generatore di Thevenin, cioè la tensione a vuoto tra i punti A e B guardando la rete N riportata in Figura 10.

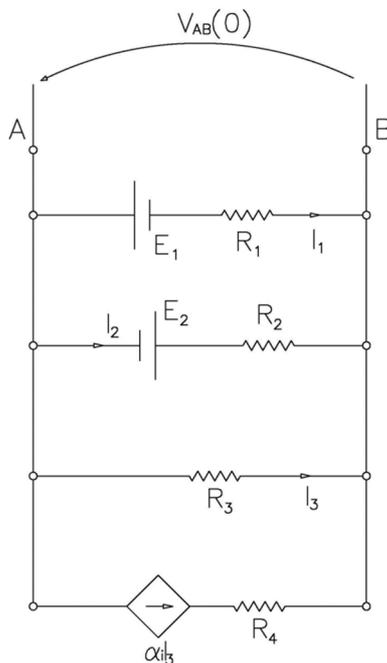


Figura 10 - Rete N da semplificare tramite il teorema di Thevenin, schema per il calcolo della tensione  $V_{AB(0)}$ .

Per determinare la  $V_{AB(0)}$ , possiamo semplificare i quattro rami in parallelo con l'equivalente di Millman riportato in Fig. 11.

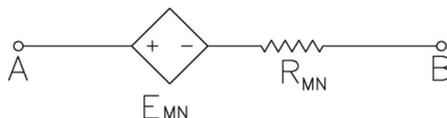


Figura 11 - Equivalente di Millman della rete N schematizzata in Figura 10.

Risulta:

$$E_{MN} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \alpha_1 I_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad \text{e} \quad R_{MN} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (34)$$

Inoltre:

$$V_{AB(0)} = E_{MN} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \alpha_1 I_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (35)$$

cioè la tensione a vuoto dipende dalla variabile di controllo  $I_3$ . Tuttavia, essendo la variabile di controllo interna alla rete, ci sarà sempre un'altra relazione che lega  $V_{AB(0)}$  alla  $I_3$ , in questo caso è:

$$V_{AB(0)} = R_3 I_3 \quad (36)$$

per cui, mettendo a sistema le (35)-(36) si trova un valore noto della tensione a vuoto.

Per determinare la resistenza di Thevenin, rendiamo passiva la rete N senza toccare il generatore dipendente, e colleghiamo tra A e B un generatore di prova  $V_P$  che permetterà il passaggio sul suo ramo di una corrente  $I_P$  come visualizzato in Figura 12: la resistenza della rete vista da A e B è il rapporto  $V_P/I_P$ .

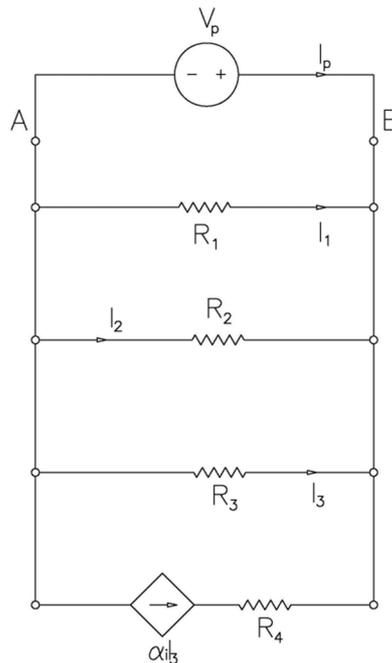


Figura 12 - Schema per il calcolo della resistenza di Thevenin.

Dalla legge al nodo B (o A, che sarebbe una combinazione lineare essendoci solo due nodi) si ha:

$$I_P + I_1 + I_2 + I_3 + \alpha_1 I_3 = 0 \quad (37)$$

Considerando la legge di Ohm ai rami con resistenze  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  e  $V_{AB} = -V_P$ , si ha:

$$\begin{aligned} I_P = -I_1 - I_2 - I_3 - \alpha_1 I_3 &= -\frac{V_{AB}}{R_1} - \frac{V_{AB}}{R_2} - \frac{V_{AB}}{R_3} - \alpha_1 \frac{V_{AB}}{R_3} = \\ &= \frac{V_P}{R_1} + \frac{V_P}{R_2} + \frac{V_P}{R_3} + \alpha_1 \frac{V_P}{R_3} = V_P \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{\alpha_1}{R_3} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

La resistenza di Thevenin è quindi:

$$R_{TH} = \frac{V_P}{I_P} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{\alpha_1}{R_3} \right)^{-1} \quad (39)$$

e dipende dalla grandezza adimensionale  $\alpha_1$  che definisce il generatore dipendente.

Sostituendo la rete N con il generatore di Thevenin così determinato, si ottiene la maglia in Figura 13, da cui si evince che:

$$I = \frac{V_{AB(0)}}{R + R_{TH}} \quad (40)$$

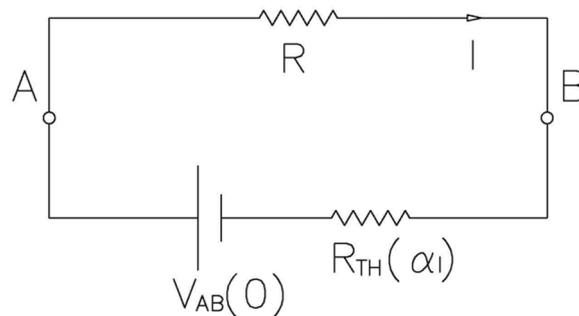


Figura 13 - Circuito equivalente a quello in Figura 9, in cui la rete N è stata sostituita dall'equivalente generatore di Thevenin.

Per verificare questo metodo, assegniamo valori numerici ai bipoli del circuito in Figura 9 e risolviamo il circuito, cioè calcoliamo la corrente I, utilizzando prima il procedimento sopra riportato che fa uso del principio di Thevenin, poi il teorema di Millman.

Si considerino:  $E_1=1$  V,  $E_2=4$  V,  $R=R_1=1$   $\Omega$ ,  $R_2=2$   $\Omega$ ,  $R_3=3$   $\Omega$ ,  $R_4=4$   $\Omega$ ,  $\alpha_1=2$ .

Utilizzando il principio di Thevenin, le eq. (35)-(36) diventano:

$$\begin{cases} V_{AB(0)} = -0.55 - 1.09I_3 \\ V_{AB(0)} = 3I_3 \end{cases} \quad (41)$$

sistema che fornisce il valore della tensione a vuoto, cioè la f.e.m. di Thevenin,  $V_{AB(0)} = -0.40$  V.

La resistenza di Thevenin, secondo l'eq. (39), risulta:  $R_{TH} = 0.4$   $\Omega$ .

Infine, la corrente da determinare, secondo l'eq. (40), risulta:

$$I = -0.29 \text{ A} \quad (42)$$

Utilizzando, invece, il teorema di Millman, trasformiamo tutti i rami del circuito in Figura 9 nel generatore equivalente di Millman rappresentato in Figura 14.

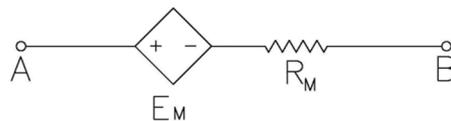


Figura 14 - Generatore di Millman equivalente all'intero circuito in Figura 9.

Risulta:

$$E_M = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \alpha_1 I_3}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = -0.35 - 0.71I_3 \quad (43)$$

Inoltre:

$$V_{AB} = E_M = -0.35 - 0.71I_3 \quad (44)$$

Mettendo a sistema la (44) con la legge di Ohm al ramo  $R_3$ ,  $V_{AB} = R_3 I_3 = 3I_3$ , si ottiene  $V_{AB} = -0.28$  V.

Infine, dalla legge di Ohm al ramo  $R$ , si ricava:

$$I = \frac{V_{AB}}{R} = -0.28 \text{ A} \quad (45)$$

che, a parte l'approssimazione, coincide con la soluzione determinata tramite il principio di Thevenin e indicata dalla (42).

Dall'esempio 6 si deduce che:

*Quando applichiamo il principio di Thevenin ad una rete  $N$  che include un generatore dipendente **da una grandezza interna alla rete**, il generatore equivalente di Thevenin sarà costituito da una f.e.m. di valore noto, indipendente dalla grandezza di controllo, e da una resistenza in serie che dipende dal coefficiente di proporzionalità che definisce il generatore dipendente.*

*Questa conclusione resta valida sia nel caso di applicazione del principio di Norton, sia nel caso di tutti i tipi di generatori dipendenti.*

*Esempio 7 - Semplificazione di una rete con un generatore dipendente da una grandezza esterna alla rete tramite il principio di Thevenin*

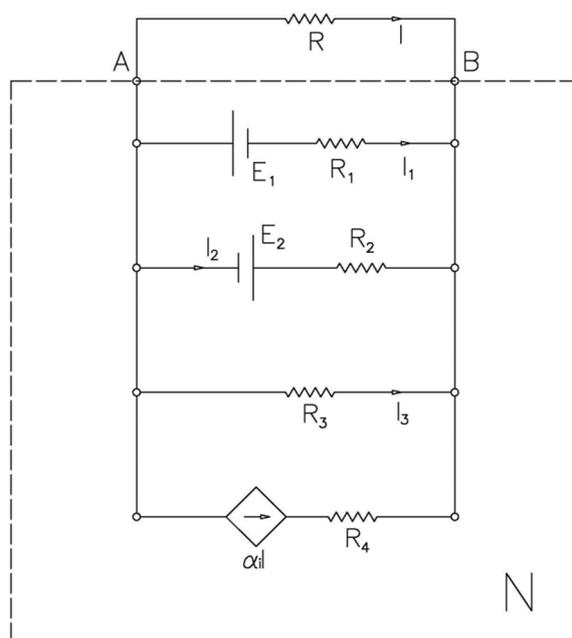


Figura 15 - Circuito elettrico relativo all'esempio 7. La rete  $N$  contiene un generatore dipendente da una grandezza esterna alla rete  $N$  stessa, e deve essere semplificata con il principio di Thevenin.

Il circuito di Figura 15 è simile a quello utilizzato nell'Esempio 6 e risolto sia con il teorema di Millman, sia con il principio di Thevenin. Rispetto all'esempio precedente, però, il generatore dipendente che è presente ora nella rete  $N$  dipende da una variabile esterna alla rete stessa; in questo caso la corrente  $I$ .

Vogliamo quindi determinare ancora una volta la corrente  $I$ , semplificando la rete  $N$  con il generatore equivalente di Thevenin.

Calcoliamo la f.e.m. del generatore di Thevenin, cioè la tensione a vuoto tra i punti A e B guardando la rete N riportata in Figura 16.

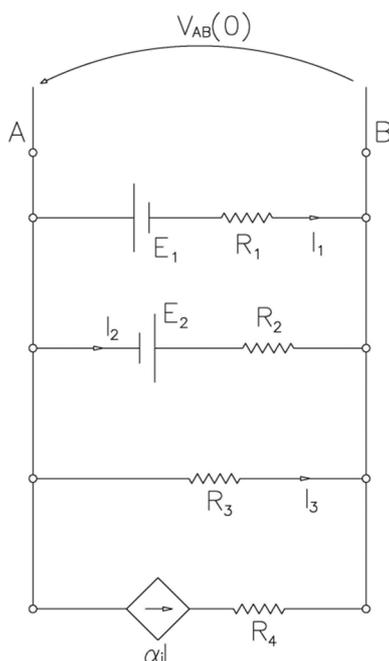


Figura 16 - Rete N da semplificare tramite il teorema di Thevenin, schema per il calcolo della tensione  $V_{AB(0)}$ .

Per determinare la  $V_{AB(0)}$ , possiamo semplificare i tre rami in parallelo con l'equivalente di Millman riportato in Figura 17.

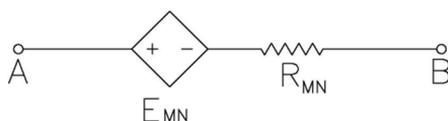


Figura 17 - Equivalente di Millman della rete N schematizzata in Figura 16.

Risulta:

$$E_{MN} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \alpha I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad \text{e} \quad R_{MN} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (46)$$

Inoltre:

$$V_{AB(0)} = E_{MN} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \alpha I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (47)$$

cioè la tensione a vuoto dipende dalla variabile di controllo I. Tuttavia, essendo la variabile di controllo esterna alla rete, non vi è modo di trovare una relazione ulteriore tra  $V_{AB(0)}$  e la I, per cui la tensione a vuoto, cioè la f.e.m. del generatore equivalente di Thevenin resta sempre dipendente dalla variabile di controllo.

Per determinare la resistenza di Thevenin, rendiamo passiva la rete N. In questo caso **il generatore dipendente è funzione di una grandezza esterna alla rete, per cui ai fini del rendere passiva la rete, possiamo considerarlo come indipendente**, cioè, essendo un generatore di corrente, considerarlo un circuito aperto.

Collegiamo quindi tra A e B un generatore di prova  $V_P$  che permetterà il passaggio sul suo ramo di una corrente  $I_P$ : la resistenza della rete vista da A e B è il rapporto  $V_P/I_P$ , come visualizzato in Figura 18.

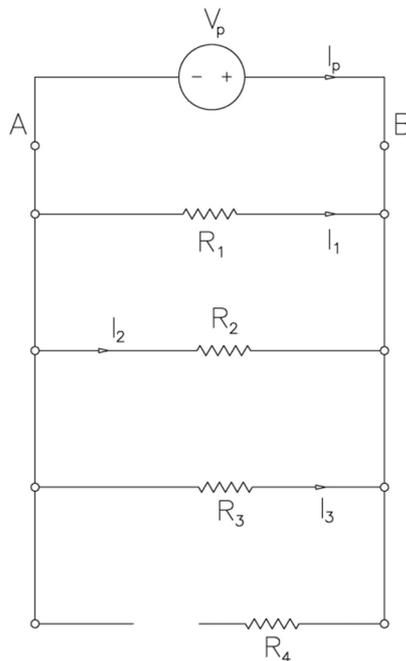


Figura 18 - Schema per il calcolo della resistenza di Thevenin.

Si evince facilmente che la resistenza di Thevenin è:

$$R_{TH} = \frac{V_P}{I_P} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} \quad (48)$$

ed è un valore noto che non dipende in alcun modo dal generatore controllato.

Sostituendo la rete N con il generatore di Thevenin così determinato, si ottiene la maglia in Figura 19, da cui si evince che:

$$I = \frac{V_{AB(0)}}{R + R_{TH}} \quad (49)$$

che contiene la I anche a secondo membro, per cui è un'equazione nella sola incognita I che può essere risolta.

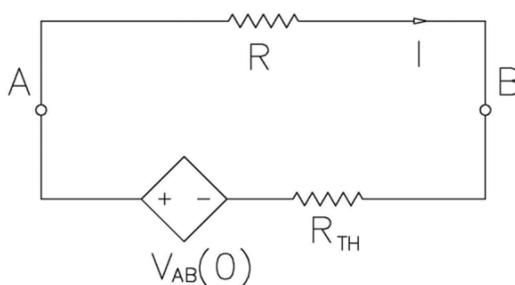


Figura 19 - Circuito equivalente a quello in Figura 15, in cui la rete N è stata sostituita dall'equivalente generatore di Thevenin.

Per verificare questo metodo, assegniamo valori numerici ai bipoli del circuito in Figura 15 e risolviamo il circuito, cioè calcoliamo la corrente I, utilizzando prima il procedimento sopra riportato che fa uso del principio di Thevenin, poi il teorema di Millman.

Si considerino, come prima:  $E_1=1\text{ V}$ ,  $E_2=4\text{ V}$ ,  $R=R_1=1\ \Omega$ ,  $R_2=2\ \Omega$ ,  $R_3=3\ \Omega$ ,  $R_4=4\ \Omega$ ,  $\alpha_1=2$ .

Utilizzando il principio di Thevenin, l'eq. (47) diventa:

$$V_{AB(0)} = -0.55 - 1.09I \quad (50)$$

La resistenza di Thevenin, secondo l'eq. (48), risulta:  $R_{TH} = 0.55\ \Omega$ .

Infine, la corrente da determinare, secondo l'eq. (49), risulta:

$$I = \frac{-0.55 - 1.09I}{1.55} = -0.35 - 0.70I \Rightarrow I = -0.21\text{ A} \quad (51)$$

Utilizzando il teorema di Millman, trasformiamo tutti i rami del circuito in Figura 15 nel generatore equivalente di Millman rappresentato in Figura 20.

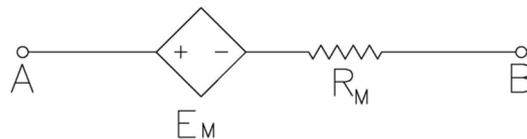


Figura 20 - Generatore di Millman equivalente all'intero circuito in Figura 15.

Risulta:

$$E_M = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \alpha_1 I}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = -0.35 - 0.71I \quad (52)$$

Inoltre:

$$V_{AB} = E_M = -0.35 - 0.71I \quad (53)$$

Mettendo a sistema la (53) con la legge di Ohm al ramo R,  $V_{AB} = RI = I$ , si ottiene  $I = -0.20\text{ A}$ , che, a parte l'approssimazione, coincide con la soluzione determinata tramite il principio di Thevenin e indicata dalla (51).

Dall'esempio 7 si evince che:

*Quando applichiamo il principio di Thevenin a una rete N che includa un generatore dipendente da una grandezza esterna alla rete, il generatore equivalente di Thevenin sarà costituito da una f.e.m. dipendente dalla grandezza di controllo, e da una resistenza in serie che non dipende dal coefficiente di proporzionalità che definisce il generatore dipendente, avendo reso passivo il generatore dipendente nel calcolo della resistenza.*

*Questa conclusione resta valida sia nel caso di applicazione del principio di Norton, sia nel caso di tutti i di generatori dipendenti.*

Anche qui, tutto ciò che si è detto è, chiaramente, valido anche in regime sinusoidale introducendo i vettori rotanti, rappresentativi di tensione e corrente, e l'operatore impedenza.

### 3. Generatori dipendenti da una grandezza del proprio ramo

Costituiscono un caso particolare i generatori dipendenti da una grandezza che fa parte del ramo in cui sono installati. Questi casi sono riportati in Figura 21. Essi, come si spiegherà, sono equivalenti alle resistenze di Figura 22.

A tal proposito, si ricorda che due circuiti sono *equivalenti* tra loro se, sostituendo l'uno con l'altro, il resto del sistema non si accorge del cambiamento. Questo, nel caso semplice di due bipoli, corrisponde a dire che i due bipoli sono equivalenti se hanno la stessa tensione ai propri morsetti e sono percorsi dalla medesima corrente.

Con questa premessa, analizziamo i casi di Figura 21.

#### **Il generatore di Figura 21a) è un GTDC.**

Esso genera tra i punti A e B una tensione  $R_m I$  dipendente dalla corrente  $I$  che scorre sul suo stesso ramo da A a B.

Tra i punti A e B, quindi, la tensione è  $V_{AB} = R_m I$  e la corrente è  $I$ .

Se esiste un bipolo equivalente da collegare tra A e B, esso deve essere percorso da una corrente  $I$  che vada da A a B e ai suoi morsetti A e B deve esserci una tensione  $R_m I$ .

Questo bipolo equivalente è proprio la resistenza  $R_m$ . La legge di Ohm infatti afferma che una resistenza  $R_m$  collegata tra i punti A e B e percorsa da una corrente  $I$  da A a B, ha una tensione ai suoi capi pari a  $V_{AB} = R_m I$ .

In definitiva, il GTDC di Figura 21a) è equivalente alla resistenza di Figura 22a), poiché, in entrambi i casi,  $V_{AB} = R_m I$ .

#### **Il generatore di Figura 21b) è ancora un GTDC.**

Esso genera ancora una tensione  $V_{AB} = R_m I$ , e la corrente da cui dipende è la  $I$  del suo ramo che va, però, da B ad A.

Il bipolo equivalente tra A e B deve avere la stessa  $V_{AB} = R_m I$  e deve essere percorso dalla stessa corrente  $I$  da B ad A.

Esso è la resistenza negativa  $-R_m$  di Figura 22b), poiché, secondo la legge di Ohm,  $V_{AB} = -(-R_m)I = R_m I$ .

In definitiva, il GTDC di Figura 21b) è equivalente alla resistenza di Figura 22b), poiché, in entrambi i casi,  $V_{AB} = R_m I$ .

#### **Il generatore di Figura 21c) è un GCDT.**

Esso genera una corrente  $I = G_m V_{AB}$ , che va da A a B e dipende dalla tensione  $V_{AB}$  tramite la transconduttanza  $G_m$ .

Il bipolo equivalente tra A e B deve avere la stessa  $V_{AB}$  e deve essere percorso dalla stessa corrente  $I$  da A a B.

Esso è la resistenza data dall'inverso della transconduttanza,  $1/G_m$ , di Figura 22c), poiché, secondo la legge di Ohm,  $I = V_{AB}/(1/G_m) = G_m V_{AB}$ .

In definitiva, il GCDT di Figura 21c) è equivalente alla resistenza di Figura 22c), poiché, in entrambi i casi,  $I = G_m V_{AB}$ .

#### **Il generatore di Figura 21d) è ancora un GCDT.**

Esso genera ancora una corrente  $I = G_m V_{AB}$ , che va, però, da B a A e dipende ancora dalla tensione  $V_{AB}$  tramite la transconduttanza  $G_m$ .

Il bipolo equivalente tra A e B deve avere la stessa  $V_{AB}$  e deve essere percorso dalla stessa corrente  $I$  da B a A.

Esso è la resistenza data dall'opposto dell'inverso della transconduttanza,  $-1/G_m$ , di Figura 22d), poiché, secondo la legge di Ohm,  $I = -V_{AB}/(-1/G_m) = G_m V_{AB}$ .

In definitiva, il GCDT di Figura 21d) è equivalente alla resistenza di Figura 22d), poiché, in entrambi i casi,  $I = G_m V_{AB}$ .

Si deve infine notare che tra i casi particolari di generatori dipendenti da una grandezza del proprio ramo non compaiono GTDT e GCDC. Un generatore di tensione dipendente dalla tensione tra i punti cui è collegato, infatti, non ha alcun significato fisico salvo che la grandezza adimensionale che lo definisce sia  $\alpha_V = 1$ . Analogamente, un generatore di corrente dipendente dalla corrente che lo attraversa non ha significato fisico a meno del caso banale in cui  $\alpha_I = 1$ .

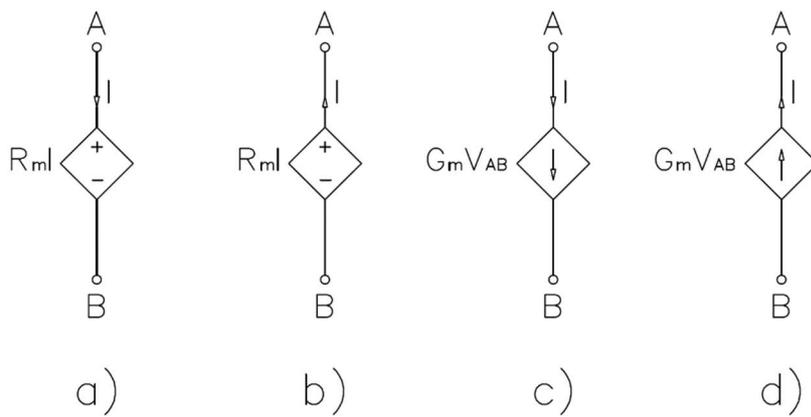


Figura 21 - Generatori dipendenti da una grandezza del proprio ramo.

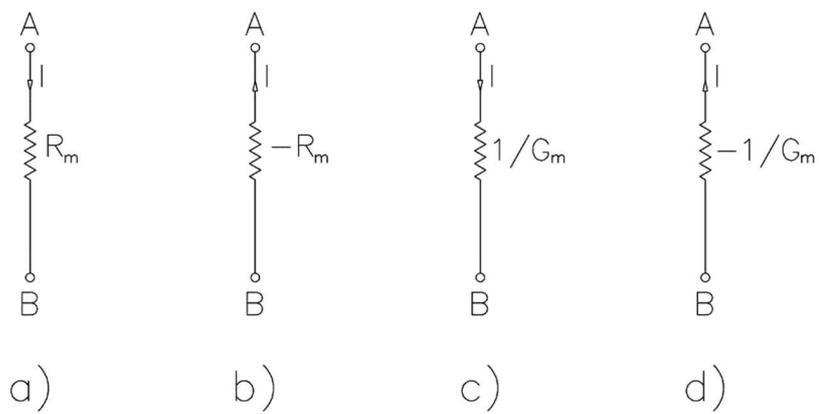


Figura 22 - Resistenze equivalenti ai generatori dipendenti di Figura 21.

## ***Sommario***

1. Introduzione	2
2. Analisi dei circuiti elettrici alla presenza di generatori dipendenti	3
2.1 Le leggi di Kirchhoff	3
2.2 Teorema di Millman	8
2.3 Principi di Thevenin e Norton	12
3. Generatori dipendenti da una grandezza del proprio ramo	21
Sommario	23