UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Anno Accademico 2016-2017

prof. ing. Bruno Azzerboni

Soluzione equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

1.1 Equazioni del primo ordine

Sono equazioni del tipo:

$$y' + a(x)y = b \qquad (1)$$

con a e b costanti.

Per risolvere questa equazione poniamo, innanzitutto, $b = 0$ e l'equazione che otteniamo e:

$$\bar{y}' + a(x)\bar{y} = 0$$

ed è detta *omogenea associata*.

$$\frac{d\overline{y}}{dx} + a(x)\overline{y} = 0$$

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = -a(x)\overline{y}$$

$$\frac{d\overline{y}}{\overline{y}} = -a(x)adx$$

$$\int \frac{d\overline{y}}{\overline{y}} = -\int a(x)dx$$

$$\ln \overline{y} = -A(x) + c$$

Con $A(x)$ primitiva qualsiasi di $a(x)$

$$|\overline{y}| = \left[e^{(-A(x)+c)}\right]$$

$$|\overline{y}| = e^{-A(x)}e^{c}$$

$$\overline{y} = \pm e^{-A(x)}e^{c}$$

$$\overline{y} = e^{-A(x)}k$$

Quindi la ***soluzione generale dell'equazione omogenea associata*** è:

$$\bar{y} = ke^{-A(x)} \qquad (2)$$

La ***soluzione particolare y^* dell'equazione non omogenea***, essendo in questo caso b costante, sarà della forma:

$$y^* = B$$

sostituendo nella (1) si ha:

$$y^{*\prime} + ay^* = b$$

e considerando che $\frac{dy^*}{dx} = y^{*\prime} = 0$ si ottiene:

$$ay^* = b$$

$$aB = b \quad da\ cui\ B = \frac{b}{a}$$

per cui, la soluzione particolare dell'equazione non omogenea sarà:

$$y^* = \frac{b}{a} \qquad (3)$$

E quindi la ***soluzione generale della equazione lineare a coefficienti costanti*** (1), somma della soluzione dell'omogenea associata (2) e della soluzione particolare (3), è:

$$y = \bar{y} + y^* = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$$

1.2 Equazioni del secondo ordine

1.2.1 Omogenee
Sono equazioni del tipo:

$$y'' + py' + qy = 0$$

Equazione caratteristica ($k = y'$):

$$k^2 + pk + q = 0$$

questa equazione di secondo grado ammette due soluzioni k_1 e k_2 e quindi, è ben noto, si hanno i seguenti possibili casi:

- k_1 e k_2 *reali e distinte* per cui l'integrale generale è del tipo

$$y = C_1 e^{K_1 x} + C_2 e^{K_2 x}$$

- k_1 e k_2 *reali coincidenti* per cui l'integrale generale è del tipo

$$y = e^{K_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

- k_1 e k_2 *complesse coniugate* per cui l'integrale generale è del tipo

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta\, x)$$

1.2.2 Non omogenee
Sono equazioni del tipo:

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

La *soluzione generale* sappiamo essere del tipo

$$y = \bar{y} + y^*$$

dove:

$\bar{y}$ è la *soluzione generale dell'equazione omogenea associata*;
y^* è la *soluzione particolare dell'equazione non omogenea.*

Sappiamo che la soluzione particolare dell'equazione non omogenea, generalmente, si determina scegliendo una funzione dello stesso tipo della $f(x)$; per cui esaminiamo ora alcuni casi comuni.

- $\boldsymbol{f(x) = P(x)e^{\alpha x}}$ **cioè prodotto di un polinomio per un esponenziale**

Allora:

se α *non è radice dell'equazione caratteristica* si ha:

$$y^* = Q(x)e^{\alpha x}$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$

se α *è radice semplice dell'equazione caratteristica* si ha:

$$y^* = xQ(x)e^{\alpha x}$$

se α *è radice doppia dell'equazione caratteristica* si ha:

$$y^* = x^2 Q(x) e^{\alpha x}$$

- $\boldsymbol{f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)\, e^{\alpha x}\sin\beta x}$

Allora:

se $(\alpha + j\beta)$ *non è radice dell'equazione caratteristica* si ha:

$$y^* = U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)\, e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (4)$$

dove $U(x)$ e $V(x)$ sono polinomi di grado uguale al grado più elevato tra $P(x)$ e $Q(x)$

se $(\alpha + j\beta)$ *è radice dell'equazione caratteristica* si ha:

$$y^* = x[U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)\, e^{\alpha x}\sin\beta x] \qquad (5)$$

è da notare che le forme indicate di y^* in (4) e (5) vengono conservate anche nel caso in cui uno dei polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ sia identicamente nullo, cioè quando:

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \quad o \quad f(x) = Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Caso particolare:

- $\boldsymbol{f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x}$

con M ed N costanti

se $(j\beta)$ *non è radice dell'equazione caratteristica* si ha:

$$y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

se $(j\beta)$ *è radice dell'equazione caratteristica* si ha:

$$y^* = x[A\cos\beta x + B\sin\beta x]$$

Sommario