<u>Compito di Elettrotecnica</u>

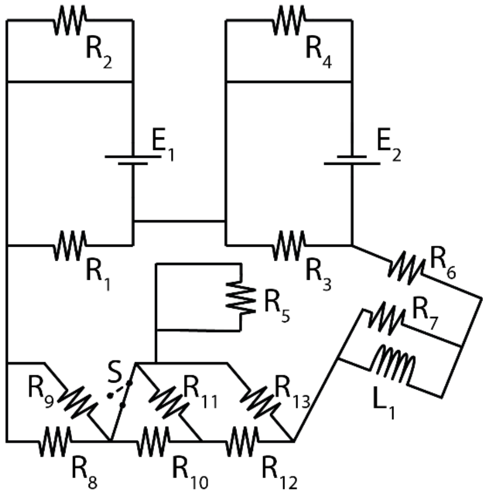
6 Giugno 2023

Nome e Cognome ………………………………………………………… Matricola……………………

Corso di Laurea…………………………………………………………………………………………..

ES.1 – Dato il circuito in figura a regime, calcolare la potenza dissipata dal resistore R_9. All'istante $t = 0$ l'interruttore S viene aperto. Determinare l'espressione temporale della corrente che scorre nell'induttore L_1.

$\mathbf{E_1 = 3\ V}$; $\mathbf{E_2 = 10\ V}$; $\mathbf{R_i = i\ \Omega}$; $\mathbf{L_1 = 8\ mH}$.

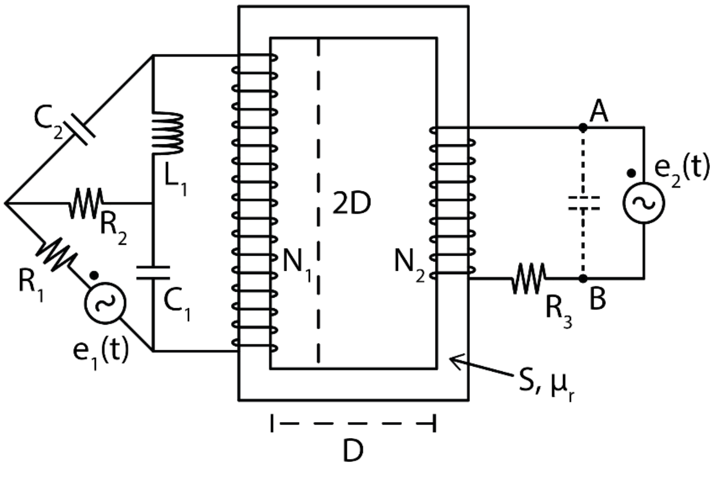


ES.2 – Dato il circuito in figura, determinare il valore della capacità da inserire tra i punti A e B per rifasare totalmente.

$\mathbf{e_1(t) = 3\cos(\omega t)\ V}$; $\mathbf{e_2(t) = 7\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)\ V}$; $\mathbf{C_1 = 2\ \mu F}$; $\mathbf{C_2 = 4\ \mu F}$;

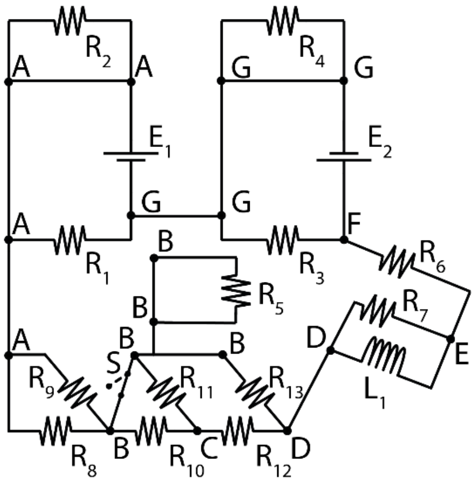
$\mathbf{L_1 = 0.5\ mH}$; $\mathbf{R_1 = 8\ \Omega}$; $\mathbf{R_2 = 12\ \Omega}$; $\mathbf{R_3 = 5\ \Omega}$; $\mathbf{\omega = 100 \cdot 10^3\ \frac{rad}{s}}$;

$\mathbf{D = 0.5\ cm}$; $\mathbf{S = 5\ cm^2}$; $\mathbf{\mu_r = 800}$; $\mathbf{N_1 = 1000}$; $\mathbf{N_2 = 500}$.

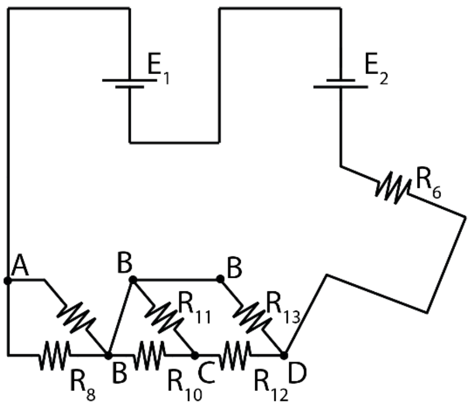


ES.1 – Dato il circuito in figura a regime, calcolare la potenza dissipata dal resistore R_9. All'istante $t = 0$ l'interruttore S viene aperto. Determinare l'espressione temporale della corrente che scorre nell'induttore L_1.

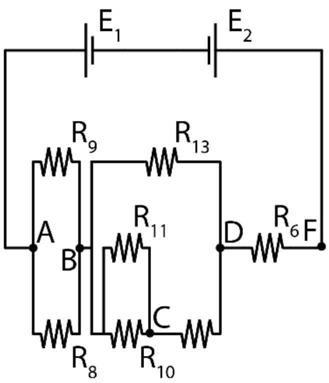
$\mathbf{E_1 = 3\ V}$; $\mathbf{E_2 = 10\ V}$; $\mathbf{R_i = i\ \Omega}$; $\mathbf{L_1 = 8\ mH}$.



Le resistenze R_2, R_4 e R_5 sono parallele ad un cortocircuito e, quindi, si possono rimuovere. L'induttore L_1, a regime, è equivalente ad un cortocircuito e si può non considerare. Di conseguenza, anche R_7 risulta essere parallela ad un cortocircuito. I generatori E_1 ed E_2 sono prevalenti sulle resistenze R_1 ed R_3, che non vanno dunque considerate.



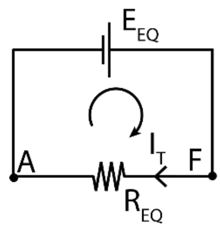
Ridisegnando il circuito si ottiene:



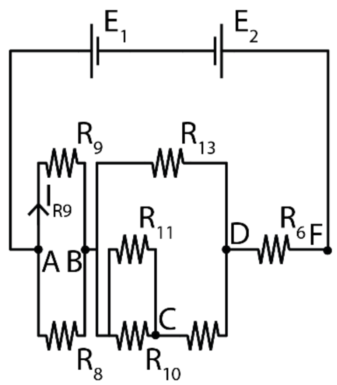
Si calcola la tensione equivalente e la resistenza equivalente tra i nodi A ed F:

$$E_{EQ} = E_2 - E_1 = 10 - 3\ V = 7\ V$$

$$R_{EQ} = (R_9 \parallel R_8) + \left(R_{13} \parallel \left(R_{12} + (R_{11} \parallel R_{10})\right)\right) + R_6 =$$
$$= \frac{R_8 R_9}{R_8 + R_9} + \frac{R_{13}\left(R_{12} + \frac{R_{11}R_{10}}{R_{11} + R_{10}}\right)}{R_{13} + R_{12} + \frac{R_{11}R_{10}}{R_{11} + R_{10}}} + R_6 =$$
$$= \left(\frac{72}{17} + \frac{156 + \frac{1430}{21}}{25 + \frac{110}{21}} + 6\right)\Omega = \left(\frac{72}{17} + \frac{4706}{635} + 6\right)\ \Omega = 17.65\ \Omega$$

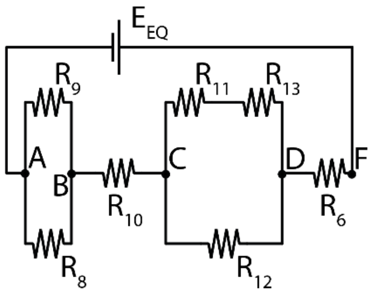


La corrente equivalente si potrà dunque usare per ricavare la caduta di potenziale tra i nodi A e B e, da questi, la corrente che scorre nel ramo della resistenza R_9. Ottenuta questa, è possibile calcolare la potenza dissipata da R_9.



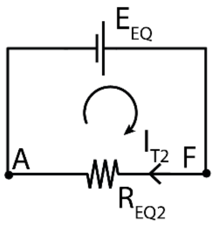
$$I_T = \frac{E_{EQ}}{R_{EQ}} = \frac{7}{17.65}\ A = 0.40\ A$$
$$V_{AB} = \frac{R_8 R_9}{R_8 + R_9} I_T = \frac{72}{17} 0.40\ V = 1.69\ V$$
$$I_{R_9} = \frac{V_{AB}}{R_9} = \frac{1.69}{9}\ A = 0.19\ A$$
$$P_{R_9} = R_9 I_{R_9}^2 = 9 \cdot 0.19^2 = 0.32\ W$$

Aprendo l'interruttore S, il circuito diventa:



Si calcola la nuova resistenza equivalente tra i nodi A ed F:

$$R_{EQ2} = (R_9 \parallel R_8) + R_{10} + \big((R_{11} + R_{13}) \parallel R_{12}\big) + R_6 =$$
$$= \frac{R_8 R_9}{R_8 + R_9} + R_{10} + \frac{R_{12}(R_{11} + R_{13})}{R_{12} + R_{11} + R_{13}} + R_6 =$$
$$= \left(\frac{72}{17} + 10 + \frac{132 + 156}{36} + 6\right)\,\Omega = \left(\frac{72}{17} + 10 + 8 + 6\right)\,\Omega = 28.24\,\Omega$$



La nuova corrente totale sarà:

$$I_{T2} = \frac{E_{EQ}}{R_{EQ}} = \frac{7}{28.24}\,A = 0.25\,A$$

A causa dell'apertura dell'interruttore, la corrente che scorre nell'induttore L_1 passa da $I_T = 0.40\,A$ a $I_{T2} = 0.25\,A$ con un andamento esponenziale decrescente. Il tempo caratteristico dell'esponenziale sarà:

$$\tau = \frac{L_1}{R_{EQ2}} = \frac{0.008}{28.24}\,s = 2.83 \cdot 10^{-4}\,s$$

L'andamento è quindi:

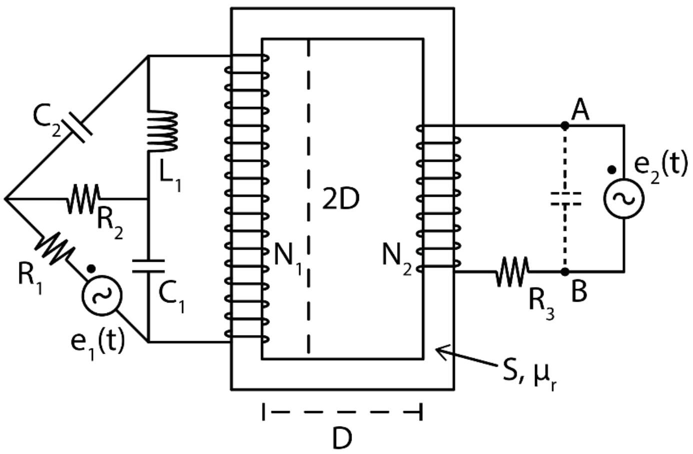
$$i_L(t) = I_T e^{-\frac{t}{\tau}} + i_{T2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 0.40\,e^{-\frac{t}{2.83}10^4} + 0.25\left(1 - e^{-\frac{t}{2.83}10^4}\right)\,A$$

ES.2 – Dato il circuito in figura, determinare il valore della capacità da inserire tra i punti A e B per rifasare totalmente.

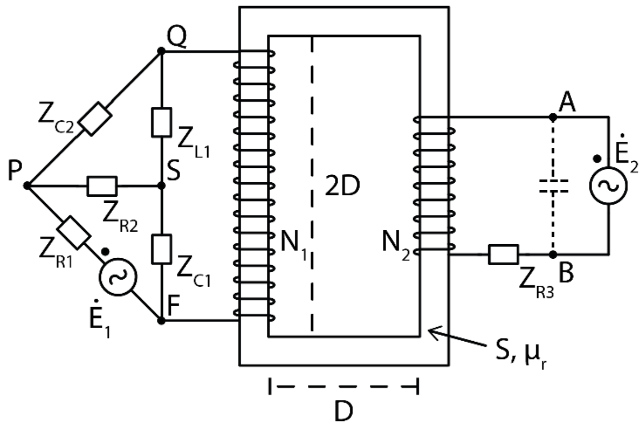
$\mathbf{e_1(t) = 3\cos(\omega t)\ V}$; $\mathbf{e_2(t) = 7\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)\ V}$; $\mathbf{C_1 = 2\ \mu F}$; $\mathbf{C_2 = 4\ \mu F}$;

$\mathbf{L_1 = 0.5\ mH}$; $\mathbf{R_1 = 8\ \Omega}$; $\mathbf{R_2 = 12\ \Omega}$; $\mathbf{R_3 = 5\ \Omega}$; $\mathbf{\omega = 100 \cdot 10^3\ \frac{rad}{s}}$;

$\mathbf{D = 0.5\ cm; S = 5\ cm^2; \mu_r = 800; N_1 = 1000; N_2 = 500.}$

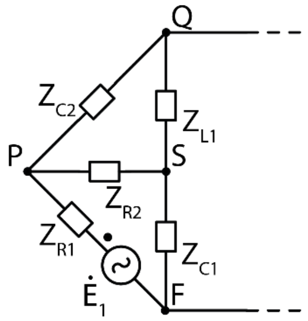


Si passa al dominio dei fasori:

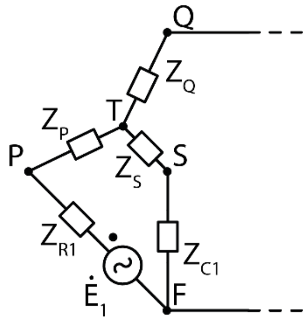


$$Z_{R_1} = R_1; \quad Z_{R_2} = R_2; \quad Z_{R_3} = R_3; \quad Z_{C_1} = \frac{1}{i\omega C_1}; \quad Z_{C_2} = \frac{1}{i\omega C_2}; \quad Z_{L_1} = i\omega L_1;$$

$$\dot{E}_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ V; \quad \dot{E}_2 = \frac{7\sqrt{2}}{4} + i\frac{7\sqrt{6}}{4}\ V;$$



Tra i nodi P, Q ed S si può sostituire il triangolo con una stella in modo da semplificare la struttura del circuito:



$$Z_P = \frac{Z_{R_2} Z_{C_2}}{Z_{R_2} + Z_{C_2} + Z_{L_1}} =$$

$$= -i \frac{\frac{R_2}{\omega C_2}}{R + i\left(\frac{\omega^2 L_1 C_2 - 1}{\omega C_2}\right)} =$$

$$= -i \frac{\frac{12}{4 \cdot 10^{5-6}}}{12 + i\left(\frac{5 \cdot 4 \cdot 10^{10-4-6} - 1}{4 \cdot 10^{5-6}}\right)} \Omega = -i \frac{30}{12 + i\, 47.5} \Omega = -0.59 - i\, 0.15\ \Omega$$

$$Z_S = \frac{Z_{L_1} Z_{R_2}}{Z_{R_2} + Z_{C_2} + Z_{L_1}} =$$

$$= i \frac{R_2 \omega L_1}{R + i\left(\frac{\omega^2 L_1 C_2 - 1}{\omega C_2}\right)} =$$

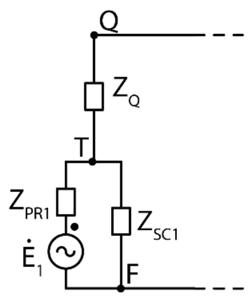
$$= i \frac{12 \cdot 5 \cdot 10^{5-4}}{12 + i\, 47.5} \Omega = i \frac{600}{12 + i\, 47.5} \Omega = 11.87 + i\, 3.00\ \Omega$$

$$Z_Q = \frac{Z_{C_2} Z_{L_1}}{Z_{R_2} + Z_{C_2} + Z_{L_1}} =$$

$$= \frac{\frac{L_1}{C_2}}{R + i\left(\frac{\omega^2 L_1 C_2 - 1}{\omega C_2}\right)} =$$

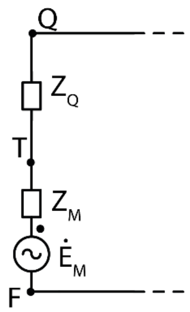
$$= \frac{\frac{5}{4} 10^{-4+6}}{12 + i\, 47.5} \Omega = \frac{125}{12 + i\, 47.5} \Omega = 0.62 - i\, 2.47\ \Omega$$

Le impedenze Z_P e Z_{R_1} sono in serie, così come Z_S e Z_{C_1}:



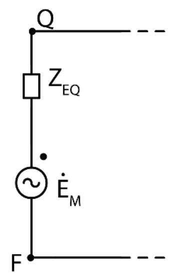
$$Z_{PR_1} = Z_P + Z_{R_1} = (-0.59 - i\,0.15 + 8)\,\Omega = 7.31 - i\,0.15\,\Omega$$
$$Z_{SC_1} = Z_S + Z_{C_1} = (11.87 + i\,3.00 - i\,5)\,\Omega = 11.87 - i\,2.00\,\Omega$$

Si applica il teorema di Millman tra i due rami tra i nodi T ed F:



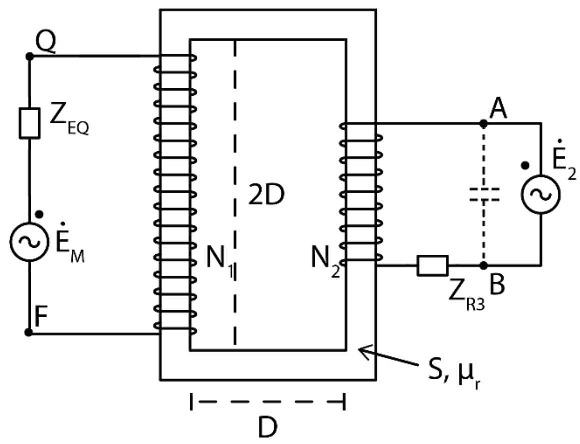
$$\dot{E}_M = \frac{\frac{\dot{E}_1}{Z_{PR_1}}}{\frac{1}{Z_{PR_1}} + \frac{1}{Z_{SC_1}}} = \frac{\dot{E}_1}{Z_{PR_1}} \frac{Z_{PR_1} Z_{SC_1}}{Z_{PR_1} + Z_{SC_1}} = \frac{\dot{E}_1 Z_{SC_1}}{Z_{PR_1} + Z_{SC_1}} =$$
$$\frac{3(11.87 - i\,2.00\,)}{7.31 - i\,0.15 + 11.87 - i\,2.00} V =$$
$$= 1.87 - i\,0.10\,V$$
$$Z_M = \frac{Z_{PR_1} Z_{SC_1}}{Z_{PR_1} + Z_{SC_1}} = \frac{(7.31 - i\,0.15)(11.87 - i\,2.00)}{7.31 - i\,0.15 + 11.87 - i\,2.00}\ \Omega =$$
$$= 4.55 - i\,0.35\,\Omega$$

Si somma l'impedenza ottenuta Z_M a Z_Q:

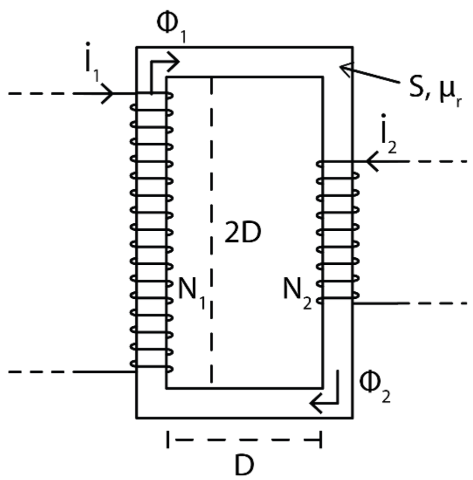


$$Z_{EQ} = Z_M + Z_Q = 4.55 - i\,0.35 + 0.62 - i\,2.47\,\Omega =$$
$$= 5.17\ - i\,2.82\,\Omega$$

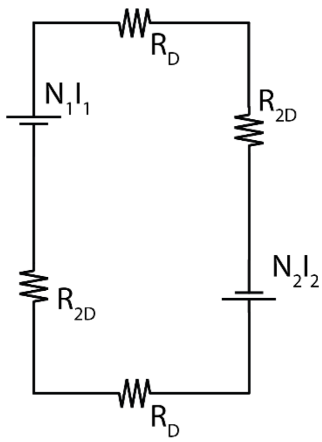
Il circuito adesso sarà:



Si consideri adesso il nucleo ferromagnetico. Dato il senso di avvolgimento del cavo attorno al nucleo, i flussi magnetici avranno il seguente verso:

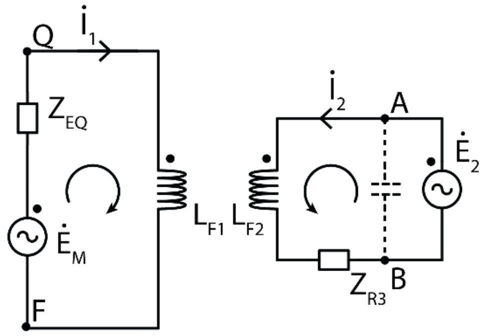


A questo circuito magnetico corrisponderà il seguente circuito elettrico:



$$R_D = \frac{D}{\mu_0 \mu_r S}$$
$$R_{2D} = \frac{2D}{\mu_0 \mu_r S} = 2R_D$$
$$R_{EQ} = 2R_D + 2R_{2D} = 6R_D = \frac{6 \cdot 0.5 \cdot 10^{-2}}{800 \cdot 1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = \frac{3}{4000 \cdot 1.26} 10^8 =$$
$$= 5.96 \cdot 10^4\ \Omega$$

Dalla resistenza equivalente del circuito è possibile calcolare i valori delle induttanze equivalenti del circuito ferromagnetico:



$$L_{F1} = \frac{N_1^2}{R_{EQ}} = \frac{10^6}{5.96 \cdot 10^4} H = 16.78\ H$$
$$L_{F2} = \frac{N_2^2}{R_{EQ}} = \frac{25 \cdot 10^4}{5.96 \cdot 10^4} H = 4.19\ H$$
$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_{F1} L_{F2}} = \sqrt{16.78 \cdot 4.19}\ H = 8.39\ H$$

Il sistema per ricavare i valori delle correnti sarà dunque:

$$\begin{cases} \dot{E}_M + \dot{E}_{L_{F1}} + \dot{E}_{M_{21}} = \dot{I}_1 Z_{EQ} \\ \dot{E}_2 + \dot{E}_{L_{F2}} + \dot{E}_{M_{12}} = \dot{I}_2 Z_{R_3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{E}_M - i\omega L_{F1} \dot{I}_1 - i\omega M_{21} \dot{I}_2 = \dot{I}_1 Z_{EQ} \\ \dot{E}_2 - i\omega L_{F2} \dot{I}_2 - i\omega M_{12} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 Z_{R_3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{I}_2 = \dfrac{\dot{E}_M - (Z_{EQ} + i\omega L_{F1}) \dot{I}_1}{i\omega M_{21}} \\ \dot{E}_2 - \dfrac{L_{F2}}{M_{21}} \dot{E}_M + \dfrac{L_{F2}}{M_{21}} (Z_{EQ} + i\omega L_{F1}) \dot{I}_1 - i\omega M_{12} \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{E}_M}{i\omega M_{21}} Z_{R_3} - \dfrac{Z_{R_3} (Z_{EQ} + i\omega L_{F1}) \dot{I}_1}{i\omega M_{21}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_2 = \dfrac{\dot{E}_M - (Z_{EQ} + i\omega L_{F1})\dot{I}_1}{i\omega M_{21}} \\ \left(Z_{EQ}\dfrac{L_{F2}}{M_{21}} + \dfrac{Z_{R_3}L_{F1}}{M_{21}} + i\omega\dfrac{L_{F1}L_{F2}}{M_{21}} - i\omega M_{12} - i\,\dfrac{Z_{R_3}Z_{EQ}}{\omega M_{21}}\right)\dot{I}_1 = \dfrac{L_{F2}}{M_{21}}\dot{E}_M - \dot{E}_2 - i\dfrac{\dot{E}_M}{\omega M_{21}}Z_{R_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_2 = \dfrac{\dot{E}_M - (Z_{EQ} + i\omega L_{F1})\dot{I}_1}{i\omega M_{21}} \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dfrac{L_{F2}}{M_{21}}\dot{E}_M - \dot{E}_2 - i\dfrac{\dot{E}_M}{\omega M_{21}}Z_{R_3}}{Z_{EQ}\dfrac{L_{F2}}{M_{21}} + \dfrac{Z_{R_3}L_{F1}}{M_{21}} - i\,\dfrac{Z_{R_3}Z_{EQ}}{\omega M_{21}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_2 = -i\dfrac{\dot{E}_M}{\omega M_{21}} - \left(\dfrac{L_{F1}}{M_{21}} - i\dfrac{Z_{EQ}}{\omega M_{21}}\right)\dot{I}_1 \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{E}_M L_{F2} - \dot{E}_2 M_{21} - i\dfrac{1}{\omega}\dot{E}_M Z_{R_3}}{Z_{EQ}L_{F2} + Z_{R_3}L_{F1} - i\,\dfrac{1}{\omega}Z_{EQ}Z_{R_3}} \end{cases}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{4.19(1.87 - i\,0.10) - 8.39\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{7\sqrt{6}}{4}\right) - i\dfrac{1}{10^5}5(1.87 - i\,0.10)}{4.19(5.17\ - i\,2.82\,) + 5\cdot 16.78 - i\dfrac{1}{10^5}5(5.17\ - i\,2.82\,)}\,A =$$
$$= -0.08286 - i\,0.35394\,A = 82.86 - i\,353.94\,mA$$

$$\dot{I}_2 = -i\frac{1.87 - i\,0.10}{8.39\cdot 10^5} - \left(\frac{16.78}{8.39} - i\frac{5.17\ - i\,2.82}{8.39\cdot 10^5}\right)(-0.08286 - i\,0.35394)\,A =$$
$$= 0.16572 + i\,0.70788\,A = 165.72 + i\,707.88\,mA$$

Dalla corrente $\dot{I}_2$ è possibile ottenere la potenza complessa tra i nodi A e B:

$$\bar{S}_{AB} = \dot{E}_2\bar{\dot{I}}_2 = P_{AB} + iQ_{AB} = \left(\frac{7\sqrt{2}}{4} + i\frac{7\sqrt{6}}{4}\right)(0.16572 - i\,0.70788)\,VAC =$$
$$= 3.44\ - i\,1.04\,VAC$$

Poiché la $Q_{AB} < 0$ non è necessario rifasare.