

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA  
*Dipartimento di Ingegneria*  
*Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina*

## ***Appunti Corso di Elettrotecnica***

***Operazioni elementari con i numeri complessi***

*Anno Accademico 2021-2022*

*prof. ing. Bruno Azzerboni*

### Definizioni

Si dice numero complesso ogni scrittura del tipo:

$$\bar{z} = a + jb$$

Con  $a$  e  $b$  numeri reali e  $j = \sqrt{-1}$  unità immaginaria.

Chiaramente l'insieme dei numeri complessi comprende sia i numeri reali  $b = 0$ , da cui

$$\bar{z} = a$$

sia i numeri immaginari  $a = 0$ , da cui.

$$\bar{z} = jb$$

Due numeri complessi sono **uguali** quando hanno entrambi uguali le parti reali ed i coefficienti delle parti immaginarie.

Due numeri complessi sono **opposti** quando hanno opposte sia le parti reali, sia i coefficienti delle parti immaginarie. Sono opposti, per esempio, i numeri complessi:

$$\bar{a} = 5 - j8 \quad e \quad \bar{b} = -5 + j8$$

Due numeri complessi sono **complessi coniugati** quando hanno uguali le parti reali ed opposti i coefficienti delle parti immaginarie. Sono complessi coniugati, per esempio, i numeri:

$$\bar{z} = a + jb \quad e \quad \check{z} = a - jb$$

### Somma e differenza tra numeri complessi

La somma o la differenza tra due numeri complessi è il numero complesso che avrà come parte reale la somma o la differenza delle parti reali dei due numeri complessi e per coefficiente della parte immaginaria la somma o la differenza dei coefficienti delle parti immaginarie dei due numeri complessi:

$$\bar{z} = a + jb \qquad \bar{w} = c + jd$$

$$\bar{z} + \bar{w} = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

$$\bar{z} - \bar{w} = (a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$$

### Prodotto tra numeri complessi

Il prodotto tra due numeri complessi è il numero complesso che otterremo moltiplicando i due numeri come se fossero dei semplici binomi e ricordando che  $j^2 = -1$ :

$$\begin{aligned} \bar{z} \cdot \bar{w} &= (a + jb) \cdot (c + jd) = \\ &= ac + jad + jbc + j^2bd = \\ &= ac + j(ad + bc) - bd = \\ &= (ac - bd) + j(ad + bc) \end{aligned}$$

In particolare il prodotto di un numero complesso per il suo complesso coniugato è un numero reale (modulo al quadrato di numero complesso):

$$\begin{aligned} \bar{z} &= a + jb \\ \check{z} &= a - jb \end{aligned}$$

$$\bar{z} \cdot \check{z} = (a + jb) \cdot (a - jb) = a^2 - jab + jab - j^2b^2 = a^2 + b^2$$

### **Divisione tra numeri complessi**

La divisione tra due numeri complessi è il numero complesso che otterremo moltiplicando numeratore e denominatore della frazione per il complesso coniugato del denominatore

$$\begin{aligned}\frac{\bar{z}}{\bar{w}} &= \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb) \cdot (c - jd)}{(c + jd) \cdot (c - jd)} = \\ &= \frac{ac - jad + jbc - j^2bd}{c^2 - jcd + jcd - j^2d^2} = \\ &= \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \\ &= \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + j \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}\end{aligned}$$

### **Reciproco di un numero complesso**

Il reciproco di un numero complesso  $\bar{z} = a + jb$  è:

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a + jb} = \frac{1 \cdot (a - jb)}{(a + jb) \cdot (a - jb)} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2}$$

### **Potenze di un numero complesso**

L'elevazione al quadrato o al cubo di un numero complesso si calcola con le stesse regole utilizzate per il calcolo del quadrato o del cubo di un binomio:

$$(a + jb)^2 = a^2 + (jb)^2 + 2jab = a^2 - b^2 + j2ab = (a^2 - b^2) + j2ab$$

$$(a + jb)^3 = a^3 + (jb)^3 + 3a^2jb + 3a(jb)^2 = a^3 - jb^3 + j3a^2b - 3ab^2 = (a^3 - 3ab^2) + j(3a^2b - b^3)$$